Exercice 1 (D'après le bac STMG Métropole, 11 septembre 2014)**.**

Partie A. *On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [6 ; 24] par : $f(x) = -x + 40 - \dfrac{144}{x}$. On note f' la fonction dérivée de f.*

1. *Démontrer que pour tout x de l'intervalle [6 ; 24], on a : $f'(x) = \frac{144-x^2}{x^2}$.* Déterminons $f'(x)$. $f'(x) = -1 - 144\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{-x^2+144}{x^2}$. Par conséquent pour tout x de l'intervalle $[6\ ;\ 24]$, nous avons bien : $f'(x) = \dfrac{144 - x^2}{x^2}$.
2. (a) *Montrer que le tableau de signes de f' sur l'intervalle [6 ; 24] est :*

x	6		12		24
$f'(x)$		+	0	−	

Étudions le signe de $-x^2 + 144$: c'est un trinôme du second degré, donc $\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 144 = 576$. Donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-0-\sqrt{576}}{2\times(-1)} = 12$ et $x_2 = \frac{-0+\sqrt{576}}{2\times(-1)} = -12$. Donc f' est positive entre -12 et 12 (c'est-à-dire entre 6 et 12, en restreignant l'ensemble de définition à l'intervalle $[6; 24]$) et négative ailleurs. Cela correspond bien au tableau de signe de l'énoncé.

(b) *Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle [6 ; 24].* On a $f(6) = -6 + 40 - \frac{144}{6} = 10$, $f(12) = -12 + 40 - \frac{144}{12} = 16$, $f(24) = -24 + 40 - \frac{144}{24} = 10$, donc :

x	6		12		24
$f'(x)$		+	0	−	
f	10	↗	16	↘	10

(c) *Quelle est la plus petite valeur prise par f sur l'intervalle* $[6; 24]$ *?* On lit sur le tableau de variations que cette valeur est 10 (atteinte à la fois pour $x = 6$ et $x = 24$).

Partie B. *Une entreprise produit et commercialise entre 6 et 24 tonnes d'engrais par jour.*
On admet que toute sa production est vendue.
Le bénéfice total (exprimé en centaines d'euros) réalisé pour une production de x tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction B définie par : $B(x) = -x^2 + 40x - 144$.
On admet que le bénéfice total maximal est atteint pour une production de 20 tonnes d'engrais par jour.

1. *Le bénéfice unitaire pour une production de x tonnes d'engrais est donné par* $\dfrac{B(x)}{x}$.
   Le bénéfice total et le bénéfice unitaire sont-ils maximaux pour la même production d'engrais ? On pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A. On remarque que $\frac{B(x)}{x} = \frac{-x^2+40x-144}{x} = \frac{-x^2}{x} + \frac{40x}{x} - \frac{144}{x} = -x + 40 - \frac{144}{x} = f(x)$. Donc le maximum de la fonction $x \mapsto \frac{B(x)}{x}$ est atteint pour le même x que le maximum de la fonction f étudiée dans la partie A, c'est-à-dire 12. Donc ce maximum n'est pas atteint pour la même production d'engrais que le bénéfice total (dont le maximum est atteint pour 20 tonnes d'engrais produites).

2. *Actuellement, l'entreprise fabrique 21 tonnes d'engrais par jours. Elle a la possibilité d'en fabriquer deux de plus par jour. Si on ne tient compte que du bénéfice total, l'entreprise a-t-elle intérêt à augmenter sa production ?* On a :
   - $B(21) = -21^2 + 40 \times 21 - 144 = 255$
   - $B(23) = -23^2 + 40 \times 23 - 144 = 247$

   Donc le bénéfice est moins élevé pour 23 tonnes produites que pour 21 tonnes : l'entreprise n'a pas intérêt à produire davantage.