2 Suites arithmétiques

Définition 1. Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r, appelé raison, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$.
Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme et sa raison.

Propriété 2.

- Pour tout n et p de son domaine de définition, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.
- En particulier, si u est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 3. La suite u est :

- (strictement) croissante si et seulement si sa raison est (strictement) positive ;
- (strictement) décroissante si et seulement si sa raison est (strictement) négative ;
- constante si sa raison est nulle.

Exercice 1. Cette année, les ventes d'un revendeur d'ordinateur ont diminué. Mais il s'était engagé avec son fournisseur, et il continue à recevoir chaque semaine 15 ordinateurs de plus qu'il n'en vend. Il loue un local pour stocker ces ordinateurs.
On appelle (u_n) la suite modélisant le nombre d'ordinateurs stockés dans le local au bout de n semaines. Ainsi, $u_1 = 0$ est le nombre d'ordinateurs stockés au début de la première semaine ; u_2 est le nombre d'ordinateurs stockés au début de la deuxième semaine, et ainsi de suite.

1. Justifier que la suite u est arithmétique, et donner son premier terme et sa raison.
2. Calculer u_2, u_3, u_4.
3. Combien d'ordinateurs seront stockés au bout de 10 semaines ?
4. Au bout de combien de temps son local, qui permete de stocker 230 ordinateurs, sera-t-il plein ?

Exercice 1 (Corrigé).

1. Chaque semaine, le stock augmente de 15 ordinateurs, donc chaque terme de la suite (dont les termes correspondent au stock chaque semaine) est égal au précédent auquel on ajoute 15 : c'est une suite arithmétique de raison 15. Son premier terme est $u_1 = 0$ (d'après l'énoncé).
2. C'est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 0$ et de raison 15, donc :
$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= u_1 + 15 = 0 + 15 = 15 \\ u_3 &= u_2 + 15 = 15 + 15 = 30 \\ u_4 &= u_3 + 15 = 30 + 15 = 45 \end{aligned}$$
3. Au bout de dix semaines, le nombre d'ordinateurs stockés est égal à u_{10}. Calculons ce nombre.
$$\begin{aligned} u_{10} &= u_1 + (n-1) \times r \\ &= 0 + (10-1) \times 15 \\ &= 135 \end{aligned}$$
Il y aura donc 135 ordinateurs.
4. Le local sera plein lorsque le nombre d'ordinateur dépassera la capacité du local, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned} u_n &\geqslant 230 \\ u_1 + (n-1) \times r &\geqslant 230 \\ 0 + (n-1) \times 15 &\geqslant 230 \\ 15n - 15 &\geqslant 230 \\ 15n &\geqslant 230 + 15 \\ 15n &\geqslant 245 \\ n &\geqslant \frac{245}{15} \\ n &\geqslant 16,3 \text{ environ} \end{aligned}$$
Le local sera donc plein entre la 16$^{\text{e}}$ et la 17$^{\text{e}}$ semaine.