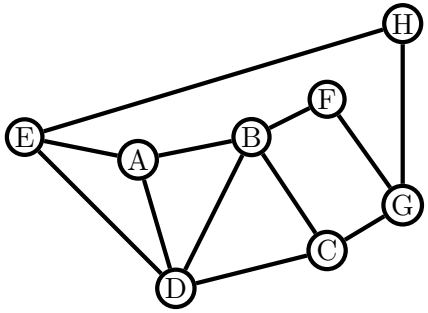
Exercice 1 (D'après le sujet de bac Centres étrangers, 8 juin 2016)**.** Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.

Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



1. (a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
   (b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Une voyageuse souhaite aller de l'aéroport H à l'aéroport B.
   (a) Déterminer le nombre minimal de vols qu'elle doit prendre. Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
   (b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.