Exercice 1 (Questions diverses — 8 points)**.** *Les questions sont indépendantes.*

1. Est-il possible de multiplier, dans cet ordre, une matrice de dimension 4×8 par une matrice de dimension 10×4 ? Justifier.
2. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3 \times \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Donner les coefficients de la matrice I_4.
4. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Puissance de matrice — 6 points)**.** On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -18 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En remarquant que $A^4 = A^3 \times A$, calculer A^4. Détailler le calcul du coefficient de la deuxième ligne et troisième colonne.
3. En déduire, sans calculatrice, la valeur de $A^{123456789}$ (une explication non-rigoureuse est acceptée).

Exercice 3 (Système d'équations — 6 points)**.** À cause d'une mauvaise gestion de ses stocks, il reste à un boulanger 242 œufs, 18 litres de lait et 39 cubes de levure, bientôt à expiration. Pour éviter de jeter des matières premières, il souhaite fabriquer des patisseries pour consommer l'ensemble de ses restes.
Fabriquer une brioche nécessite quatre œufs, 0,1 litres de lait et un demi-cube de levure ; fabriquer un pain au lait nécessite aucun œuf, 0,2 litres de lait et un cube de levure ; fabriquer un gâteau nécessite cinq œufs, 0,3 litres de lait et zéro cubes de levure. Les autres ingrédients, non périssables, sont ignorés dans cet exercice.
On appelle x, y, z le nombre de brioches, de pains au lait et de gâteaux fabriqués.

1. Expliquer pourquoi $4x+0y+5z = 242$, et donner les deux autres équations que doivent satisfaires x, y et z pour consommer l'ensemble des ressources.
2. Déterminer les matrices A, B et X telles que résoudre le système revient à résoudre l'équation matricielle $A \times X = B$.
3. Résoudre cette équation matricielle, et en déduire le nombre de chacune des trois patisseries nécessaire pour consommer toutes les matières premières du patissier.