

Exercice 1 (D'après le sujet de bac Amérique du Nord, 29 juin 2018). Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.

Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15% des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;
- 25% des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017 + n$;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017 + n$.

L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62% des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que $P = (0,625 \quad 0,375)$ est l'état stable.

3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.

On a ainsi $P_0 = (0,46 \quad 0,54)$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n \times M$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$
puis que

$$a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25.$$

2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

$n \leftarrow 0$
$a \leftarrow 0,46$
Tant que
$n \leftarrow n + 1$
.....
Fin Tant que
Afficher $2017 + n$

- (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.
(b) Quelle est l'année en sortie de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,625$ pour tout entier naturel n .
- (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0 .
(b) Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n ,

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

- (c) Résoudre par le calcul l'inéquation $a_n \geq 0,62$.
Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?