

**Exercice 1** (D'après le sujet de bac Amérique du Nord, 29 juin 2018). Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.

Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15% des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;
- 25% des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

- $A$  : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- $B$  : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel  $n$  :

- $a_n$  la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année  $2017 + n$  ;
- $b_n$  la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année  $2017 + n$ .

On note  $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année  $2017 + n$ .

L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62% des contrats d'entretien des photocopieurs.

### Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que  $P = (0,625 \quad 0,375)$  est l'état stable.

3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

### Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.

On a ainsi  $P_0 = (0,46 \quad 0,54)$ .

1. On rappelle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_{n+1} = P_n \times M$ .  
Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$   
puis que

$$a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25.$$

2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

$n \leftarrow 0$
$a \leftarrow 0,46$
Tant que .....
$n \leftarrow n + 1$
.....
Fin Tant que
Afficher $2017 + n$

- (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.  
(b) Quelle est l'année en sortie de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = a_n - 0,625$  pour tout entier naturel  $n$ .
- (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $u_0$ .  
(b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  puis démontrer que, pour tout entier  $n$ ,

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

- (c) Résoudre par le calcul l'inéquation  $a_n \geq 0,62$ .  
Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?