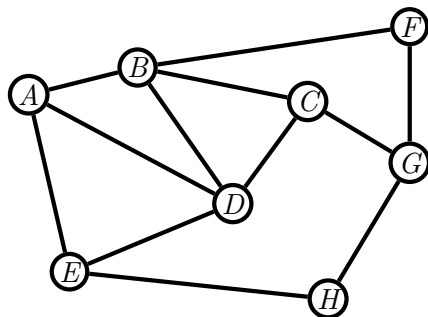


Exercice 1 (D'après le sujet de bac Centres étrangers, 8 juin 2016). Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A , B , C , D , E , F , G et H .

Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.

Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :



- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.

1. (a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet. Les sommets C et H ne sont pas adjacents, donc le graphe n'est pas complet.
 (b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe. Il existe une chaîne passant par tous les sommets (par exemple $ABFGCDEH$), donc le graphe est connexe.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne. Il y a quatre sommets de degré impairs (A , C , G et E), donc le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Une voyageuse souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H .

(a) Déterminer le nombre minimal de vols qu'elle doit prendre. Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.

- Les sommets B et H ne sont pas adjacents, donc le trajet ne peut pas être fait en un vol seulement.
- Le coefficient de la ligne B , colonne H de la matrice M^2 est 0, donc le trajet ne peut pas être fait en deux vols.
- Le coefficient de la ligne B , colonne H de la matrice M^3 est 4, donc le trajet peut être fait en trois vols.

Donc le nombre minimal de vols nécessaires est trois.

(b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs. Le coefficient de la ligne B , colonne H est 4, donc il y a quatre trajets possibles, qui sont : $BFGH$, $BCGH$, $BDEH$, $BAEH$.