

Exercice 1 (D'après le sujet de bac de Pondichéry, 7 avril 2014). Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

| | | | |
|--|----|------|----|
| Nombre de recharges en milliers | 1 | 3 | 5 |
| Coût total annuel de production en centaines d'euros | 11 | 27,4 | 83 |

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. Montrer que le triplet (a, b, c) est solution du système (S) .

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c & = 1 \\ 27a + 9b + 3c & = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = 73 \end{cases}$$

2. (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

et M et Y sont des matrices que l'on précisera.

- (b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S) .

3. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?