

Exercice 1 (Exercice type bac — 15 points). Flavie joue à un jeu vidéo dans lequel elle doit défendre sa ville contre l'ordinateur qui attaque par vagues par l'une des trois portes A , B ou C . Elle a lu sur un forum que :

- après une attaque à la porte A , l'ordinateur a une chance sur deux d'attaquer par B , une chance sur deux par C , mais jamais à nouveau en A ;
- après une attaque à la porte B , l'ordinateur attaque l'une des trois portes A , B , et C avec la même probabilité d'un tiers;
- après une attaque à la porte C , l'ordinateur attaque à nouveau en C avec une probabilité 0,05, en A avec une probabilité 0,6, et en B sinon.

Elle a également remarqué que la première attaque se fait toujours par la porte C .

On appelle $P_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ la matrice ligne décrivant la probabilité que l'ordinateur attaque l'une des trois portes A , B ou C lors de l'attaque numéro n .

1. Justifier que $P_1 = (0 \ 0 \ 1)$.
2. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets A , B , C .

On donne M la matrice de transition de ce graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0,6 & 0,35 & 0,05 \end{pmatrix}$$

3. Quelle est la signification du coefficient 0,35 dans la matrice M ?
4. (a) Calculer P_2 .
(b) Quelle est la probabilité que la deuxième attaque de l'ordinateur se fasse par la par porte B ?
5. Peut-on affirmer, à 10^{-1} près, que les trois portes ont la même probabilité de subir la 5^e attaque?
6. (a) Calculer P_{20} et P_{30} (arrondir le résultat à 10^{-2}).
(b) Conjecturer la valeur exacte des coefficients de la matrice ligne P correspondant à un état probabiliste stable.
(c) Vérifier votre conjecture.
On admet que quel que soit l'état probabiliste initial, celui-ci converge vers cet état stable.
(d) À long terme, quelle est la porte qui a le plus de probabilité d'être attaquée?

Exercice 2 (État stable — 5 points). On considère un graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable de ce graphe. Déterminer a et b .