Exercice 1 (D'après le sujet de baccalauréat Métropole La Réunion — 20 juin 2014)**.** Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,9$.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,4$.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

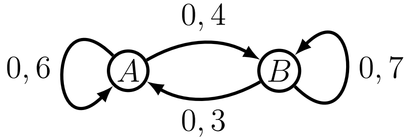
1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).
   (b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
   (c) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$.
   (b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.
3. (a) Compléter l'algorithme suivant de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.

Entrées	Saisir n
Traitement	a prend la valeur 0,5
	b prend la valeur 0,5
	Pour i allant de 2 à n
	a prend la valeur ……$\times a + \ldots$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie	Afficher a, b

(b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.

4. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.
   (c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
   (d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Exercice 2 (Extrait du sujet de baccalauréat Antilles Guyane — 24 juin 2015)**.** On considère le graphe probabiliste suivant.



1. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.
2. Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.