Exercice 1 (D'après le sujet de baccalauréat Amérique du nord — 1er juin 2016)**.** Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 6 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 10 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010 + n$;

b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année
$2010 + n$;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « abonné à la version papier » et B l'état « abonné à la version numérique ».
   (b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A, B des sommets.
   (c) Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \end{pmatrix}$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,94a_n + 0,1b_n$ et $b_{n+1} = 0,06a_n + 0,9b_n$.
   Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1

Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    a prend la valeur
        $0,94 \times a + 0,1 \times b$
    b prend la valeur
        $0,06 \times a + 0,9 \times b$
    Afficher a et b
Fin Pour

Algorithme 2

Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    c prend la valeur a
    a prend la valeur
        $0,94 \times a + 0,1 \times b$
    b prend la valeur
        $0,06 \times c + 0,9 \times b$
    Afficher a et b
Fin Pour

Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur, préciser lequel en justifiant la réponse.

3. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,1$.

   (b) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 0,625$.

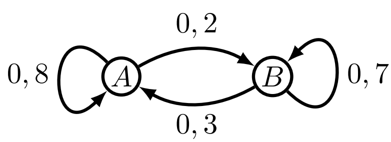
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0.

   (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0,625 + 0,375 \times 0,84^n$.

4. *Bonus :* En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 70 %.

Exercice 2 (État stable)**.** On considère le graphe probabiliste suivant.



1. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.
2. Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.