

D'après le sujet de baccalauréat Liban — 31 mai 2016.

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.

On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.

Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12% des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20% de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015 + n$;
- l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35% des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L .
2. (a) Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = (0,375 \quad 0,625)$.
(b) Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2015, on sait que 15% des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = (0,15 \quad 0,85)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$.
2. À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur 0,15
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n + 1$
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

- (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de n	0		
Valeur de C	0,15		

- (b) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n , on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$.

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = c_n - 0,375$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

On admet que, pour tout entier naturel n , on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

(b) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geq 0,35$.

(c) Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?