D'après le sujet de baccalauréat Liban — 31 mai 2016.
L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées. C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.
On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.
Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

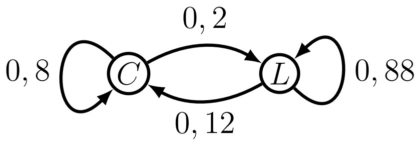
- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015 + n$;
- l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1. L'énoncé montre que $P_{L_n}(C_{n+1}) = 0,12$ et donc $P_{L_n}(L_{n+1}) = 1-0,12 = 0,88$, puis que $P_{C_n}(L_{n+1}) = 0,20$ et donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1-0,20 = 0,80$.

   D'où le graphe probabiliste :



2. (a) La matrice de transition M de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

   L'état $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$ est stable si et seulement si $P \times M = P$. On calcule donc, à la calculatrice, et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$$

   Donc l'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

   (b) On se trouve en présence d'un graphe probabiliste à deux états, donc la matrice de transitions ne contient pas de zéros. Donc quel que soit l'état initial, l'état probabiliste converge vers l'état stable P ci-dessus, qui correspond à 37,5 % de propriétaires de piscines sous contrat. C'est au dessus de l'objectif de 35 %, donc il sera atteint.

Partie B

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} = P_n \times M$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix} c_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$, donc $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,12l_n$.
   Or, pour tout n, $c_n + l_n = 1$ donc, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 0,8c_n + 0,12(1 - c_n) \\ &= 0,8c_n + 0,12 - 0,12c_n \\ &= 0,68c_n + 0,12 \end{aligned}$$

2. À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur $0,15$
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

   (a) On complète le tableau ci-dessous pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de C	0,15	0,222	0,271	0,304	0,327	0,342	0,353

   (b) À la fin de l'exécution on lit $n = 6$, donc l'objectif sera atteint au bout de la sixième année.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$.
   On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n - 0,375$, donc $c_n = v_n + 0,375$.

(a) On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= c_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,68c_n + 0,12 - 0,375 \\ &= 0,68(v_n + 0,375) - 0,255 \\ &= 0,68v_n + 0,255 - 0,255 \\ &= 0,68v_n \end{aligned}$$

D'autre part, $v_0 = c_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,68$ et de premier terme $v_0 = -0,225$.

On admet que, pour tout entier naturel n, on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

(b) On résout dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geqslant 0,35$:

$$\begin{aligned} & c_n \geqslant 0,35 \\ \iff\ & -0,225 \times 0,68^n + 0,375 \geqslant 0,35 \\ \iff\ & 0,025 \geqslant 0,225 \times 0,68^n \\ \iff\ & \tfrac{0{,}025}{0{,}225} \geqslant 0,68^n \\ \iff\ & \tfrac{1}{9} \geqslant 0,68^n \\ \iff\ & \ln \tfrac{1}{9} \geqslant \ln\left(0,68^n\right) \text{ (croissance de la fonction ln)} \\ \iff\ & \ln \tfrac{1}{9} \geqslant n \times \ln(0,68) \text{ (propriété de la fonction ln)} \\ \iff\ & \tfrac{\ln \frac{1}{9}}{\ln(0{,}68)} \leqslant n \text{(division par } \ln(0,68) < 0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln \frac{1}{9}}{\ln 0{,}68} \approx 5,7$; il faut donc $n \geqslant 6$.

(c) On retrouve le fait qu'au bout de 6 ans l'objectif de l'entreprise (35 % de contrats chez les propriétaires de piscine) sera atteint.