

**Exercice 1** (Questions diverses — 8 points). *Les questions sont indépendantes.*

1. Donner les coefficients de la matrice  $I_3$ .

2. Calculer l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Est-il possible de multiplier, dans cet ordre, une matrice de dimension  $4 \times 8$  par une matrice de dimension  $4 \times 4$ ? Justifier.

4. Calculer  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2 \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1,5 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2** (Système d'équations (d'après le sujet de bac Pondichéry, 7 avril 2014) — 6 points). Une entreprise fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction  $C$  définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 10]$  par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre  $x$  désigne le nombre de milliers de recharges produites,  $C(x)$  est le coût total de production en centaines d'euros.

1. Expliquer pourquoi on a  $27a + 9b + 3c = 17,4$ .

On admet que le triplet  $(a, b, c)$  est solution du système  $(S)$ .

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ 27a + 9b + 3c & = & 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = & 73 \end{cases} \quad \text{et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. (a) Écrire ce système sous la forme  $AX = B$  où  $A$  et  $B$  sont des matrices que l'on précisera.

(b) On admet que la matrice  $A$  est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet  $(a, b, c)$  solution du système  $(S)$ .

3. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?

**Exercice 3** (Puissance de matrice — 6 points). On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -18 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2$ . Détailler le calcul du coefficient de la deuxième ligne et troisième colonne.

2. Calculer  $A^3$ .

3. En déduire la valeur de  $A^{987654321}$  (une explication non-rigoureuse est acceptée).