

Exercice 1 (Questions diverses — 7 points). *Les questions sont indépendantes.*

1. Donner les coefficients de la matrice I_5 .
2. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Est-il possible de multiplier, dans cet ordre, une matrice de dimension 3×7 par une matrice de dimension 9×3 ? Justifier.
4. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Puissance de matrice — 6 points). On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -28 & 73 & -162 \\ -6 & 16 & -34 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 . Détailler le calcul du coefficient de la deuxième ligne et troisième colonne.
2. Calculer A^3 et A^4 .
3. En déduire la valeur de $A^{987654321}$ (une explication non-rigoureuse est acceptée).

Tourner la page.

Exercice 3 (D'après le sujet de bac Pondichéry, 7 avril 2014 — 7 points). Une entreprise fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S) .

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ 27a + 9b + 3c & = & 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = & 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

- (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
(b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S) .
- En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?