

Exercice 1 (Questions diverses — 7 points). *Les questions sont indépendantes.*

1. Donner les coefficients de la matrice I_4 .
2. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Est-il possible de multiplier, dans cet ordre, une matrice de dimension 3×7 par une matrice de dimension 9×3 ? Justifier.
4. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Puissance de matrice — 6 points). On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 9 & -15 \\ 40 & -24 & 40 \\ 40 & -24 & 40 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 . Détailler le calcul du coefficient de la deuxième ligne et troisième colonne.
2. En remarquant que $A^3 = A^2 \times A$, calculer A^3 .
3. En déduire la valeur de $A^{987654321}$ (une explication non-rigoureuse est acceptée).

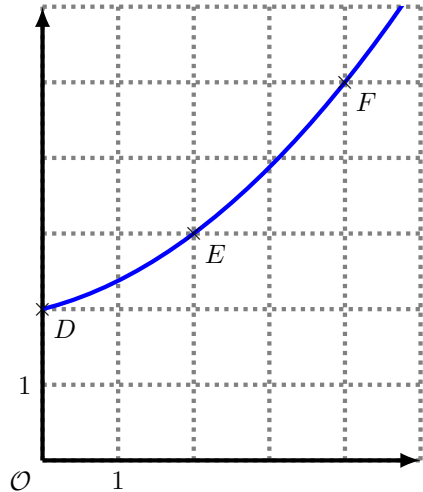
Exercice 3 (D'après le sujet de bac Amérique du Nord, 2 juin 2015 — 7 points).

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 est passée à 300 agences au 1^{er} janvier 2012 puis à 500 agences au 1^{er} janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.

Sur le dessin ci-contre, on a représenté graphiquement la fonction f .



On cherche à déterminer la valeur des coefficients a , b et c .

- (a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.
(b) En déduire que le système précédent est équivalent à : $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et B une matrice colonne que l'on précisera.
- Déterminer les valeurs des coefficients a , b et c .
- Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1^{er} janvier 2016.