Exercice 1. Dans cet exercice, toutes les mesures sont données en mètres. On pourra arrondir toutes les longueurs à l'unité (au mètre près).
Le Rainbow bridge *est un pont situé en aval des chutes du Niagara.*

Tony Hisgett, 2012
Creative Commons By 2.0

On admet que la grande arche du pont est modélisée par la fonction $f : x \mapsto -0,0029x^2 + 0,8552x$*, dans le repère représenté sur la photo (où l'origine est la base gauche de l'arche (cachée dans les arbres), au niveau de la rivière).*

1. *Montrer que le sommet de l'arche a pour abscisse* 147.
   La fonction est un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -0,0029$, $b = 0,8552$, $c = 0$. Le sommet de la parabole (donc de l'arche) a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = -\frac{0,8552}{2\times(-0,0029)} \approx 147$.
2. *Quelle est la hauteur du pont ?*
   La hauteur du pont est l'ordonnée de la parabole, soit $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \approx f(147) \approx -0,0029 \times 147^2 + 0,8552 \times 147 \approx 63$. Le pont a une hauteur d'environ 63 m.
3. *Quelle est la largeur de la base de l'arche ?* La base gauche de l'arche est à l'origine du repère, donc a pour abscisse 0. Puisque la

parabole est symétrique par rapport à l'abscisse du sommet (147), alors il y a la même distance de la base gauche (0) à l'abscisse du sommet (147), que de l'abscisse du sommet (147) à la base droite de l'arche. La base droite de l'arche a donc pour abscisse $147 + 147 = 294$. La largeur est donc 294 m.

Exercice 2.

1. *On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto -0,1x^2 + 2,4x - 6,3$$

(a) *Dresser le tableau de variations de f.* L'abscisse du sommet est $-\frac{b}{2a} = -\frac{2,4}{2\times(-0,1)} = 12$. L'ordonnée du sommet est $f(12) = -0,1 \times 12^2 + 2,4 \times 12 - 6,3 = 8,1$.

x	$-\infty$	12	$+\infty$
f	↗	8,1	↘

(b) *Montrer que $f(x) = (-0,1x + 0,3)(x - 21)$.* On développe le produit en utilisant la double distributivité.

$$\begin{aligned}
&(-0,1x + 0,3)(x - 21)\\
&= -0,1x \times x + 0,1x \times 21 + 0,3x - 0,3 \times 21\\
&= -0,1x^2 + 2,1x + 0,3x - 6,3\\
&= -0,1x^2 + 2,4x - 6,3\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

(c) *Dresser le tableau de signes de $(-0,1x + 0,3)(x - 21)$.*

x	$-\infty$		3		21		$+\infty$
$-0,1x + 0,3$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 21$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = (-0,1x + 0,3)(x - 21)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. *Aujourd'hui à Trondheim, on a pu modéliser la température par la fonction $f : x \mapsto -0,1x^2 + 2,4x - 6,3$ (où x est l'heure de la journée, entre 0 et 24, et $f(x)$ est la température, en degrés).*

   En utilisant les résultats de la question précédente, répondre aux questions suivantes.

   (a) *À quels moments de la journée a-t-il fait une température négative ?* En lisant le tableau de signes, on observe que la fonction f est négative pour $x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 21$. Donc il a fait une température négative avant 3h et après 21h.

   (b) *À quelle heure a-t-il fait le plus chaud ?* En lisant le tableau de variations, on observe que la maximum de la fonction f est atteint pour $x = 12$. Donc il a fait le plus chaud à midi.

Exercice 3. *Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(3;9)$, $B(2;1)$, et $C(0;-3)$. Déterminer les coordonnées d'un quatrième point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.*

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Appelons $D\binom{x}{y}$ les coordonnées de D. On a :

- $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{2-3}{1-9} = \binom{-1}{-8}$
- $\overrightarrow{DC}\binom{x_C - x_D}{y_C - y_D} = \binom{0-x}{-3-y} = \binom{-x}{-3-y}$

Puisque les deux vecteurs sont égaux, alors $-x = -1$, donc $x = 1$, et $-3 - y = -8$, donc $y = 5$.

Les coordonnées de D sont donc $D\binom{1}{5}$.

Exercice 4. *Dans le plan muni d'un repère, on considère trois points $A(1;3)$, $B(0;4)$ et $C\,(3;3)$, ainsi qu'un quatrième point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.*

1. *Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $\binom{1}{1}$.* Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   - $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \binom{0-1}{4-3} = \binom{-1}{1}$
   - $\overrightarrow{CB}\binom{x_B-x_C}{y_B-y_C} = \binom{0-3}{4-3} = \binom{-3}{1}$

   Puisque $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$, alors les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 2 \times x_{\overrightarrow{AB}} - x_{\overrightarrow{CB}} \\ 2 \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{CB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) - (-3) \\ 2 \times 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Montrer que les coordonnées de D sont $\binom{2}{4}$.* D'une part, $\overrightarrow{AD}\binom{1}{1}$. D'autre part, $\overrightarrow{AD}\binom{x_D-x_A}{y_D-y_A} = \binom{x_D-1}{y_D-3}$. Donc $1 = x_D - 1$ (et $x_D = 2$), et $1 = y_D - 3$ (et $y_D = 4$).

   Les coordonnées de D sont donc $D\binom{2}{4}$.
3. *Les points A, D, C sont-ils alignés ? Justifier.* D'une part, on sait que $\overrightarrow{AD}\binom{1}{1}$. D'autre part, $\overrightarrow{AC}\binom{x_C-x_A}{y_C-y_A} = \binom{3-1}{3-3} = \binom{2}{0}$.
   Vérifions la relation de colinéarité : $2 \times 1 - 1 \times 0 = 2 \neq 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et les points A, C, D ne sont pas alignés.