Exercice 1 (Quadrilatère)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(7;4)$, $B\,(13;8)$, $C\,(5;20)$ et $D\,(-1;16)$. L'objet de l'exercice est de déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.*

1. (a) *On appelle I le milieu de $[AC]$, et J le milieu de $[BD]$. Déterminer les coordonnées de I et J.*

   — Coordonnées de I : $\begin{array}{l} x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{7+5}{2} = 6 \\ y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{4+20}{2} = 12 \end{array}$ Donc $I\,(6;12)$.

   — Coordonnées de J : $\begin{array}{l} x_J = \frac{x_B+x_D}{2} = \frac{13-1}{2} = 6 \\ y_J = \frac{y_B+y_D}{2} = \frac{8+16}{2} = 12 \end{array}$ Donc $J\,(6;12)$.

   (b) *Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifier.* Puisque I et J ont les mêmes coordonnées, ce sont le même point. Le quadrilatère a donc ses diagonales qui se coupent en leur milieu : c'est un parallélogramme.

2. (a) *Calculer les longueurs AB et AD.*

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(13-7)^2+(8-4)^2} \\ &= \sqrt{6^2+4^2} \\ &= \sqrt{36+16} \\ &= \sqrt{52} \\ &= 2\sqrt{13} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AD &= \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1-7)^2+(16-4)^2} \\ &= \sqrt{(-8)^2+12^2} \\ &= \sqrt{64+144} \\ &= \sqrt{208} \\ &= 4\sqrt{13} \end{aligned}$$

   (b) *Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.* Les côtés $[AB]$ et $[AD]$, consécutifs, ne sont pas de même longueur. Le paralélllogramme n'est donc pas un losange.

3. (a) *Calculer les longueurs BD et AC.*

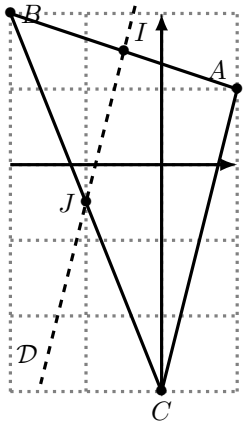
$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} & AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1-13)^2 + (16-8)^2} & &= \sqrt{(5-7)^2 + (20-4)^2} \\ &= \sqrt{(-14)^2 + 8^2} & &= \sqrt{(-2)^2 + 16^2} \\ &= \sqrt{196+64} & &= \sqrt{4+256} \\ &= \sqrt{260} & &= \sqrt{260} \\ &= 2\sqrt{65} & &= 2\sqrt{65} \end{aligned}$$

(b) *Le quadrilatère $ABCD$ est-il un rectangle ? Justifier.* Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont de même longueur, donc le parallélogramme est un rectangle.

4. *Le quadrilatère $ABCD$ est-il un carré ? Justifier.* Le parallélogramme $ABCD$ n'est pas un carré, car ce n'est pas un losange.

Exercice 2 (Triangle)**.** *Soient $A\,(1;1)$, $B\,(-2;2)$, et $C\,(0;-3)$ trois points du plan muni d'un repère quelconque, et I le milieu de $[AB]$. Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à (AC) passant par I. On appelle J le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $[BC]$.*

1. *Faire une figure.*



2. *Déterminer* par le calcul *les coordonnées de J.* On reconnait la configuration de l'énoncé des milieux (cas particulier du théorème de Thalès) : IJB et ABC sont des triangles, I est le milieu de $[AB]$, J est sur le segment $[BC]$, et les droites (AC) et (IJ) sont parallèles. Donc, d'après l'énoncé des milieux, J est le milieu de $[BC]$.
Nous pouvons donc calculer les coordonnées de J en fonction de celles de B et C.

$$\begin{cases} x_J &= \frac{x_B+x_C}{2} &= \frac{-2+0}{2} &= -1 \\ y_J &= \frac{y_B+y_C}{2} &= \frac{2-3}{2} &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de J sont donc $\left(-1;{}^{-1}/_{2}\right)$.