*Ce DM est peut-être un peu long. Faites les exercices dans l'ordre de votre choix. Vous pouvez vous arrêter sans le terminer au bout d'une heure de travail.*

**Culture générale** *L'exercice 1 est obligatoire.*

**Équations** *L'exercice 2 est obligatoire.*

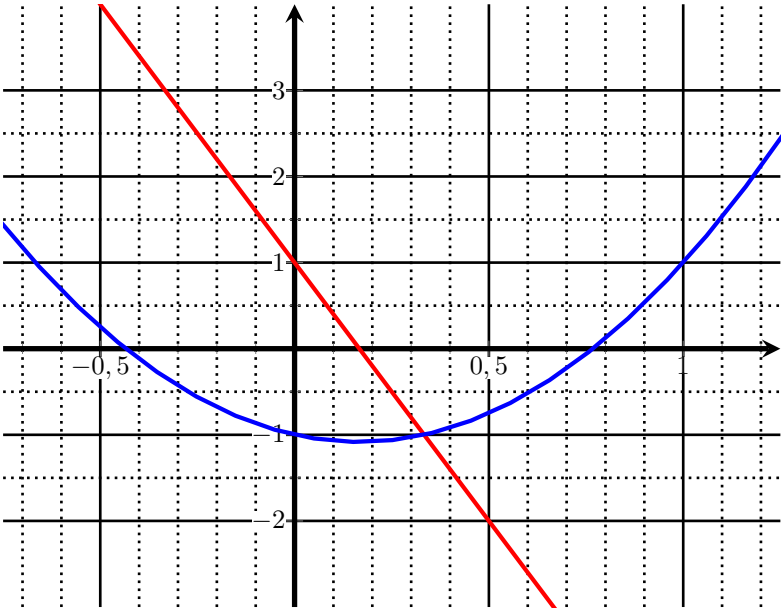
**Fonctions paires et impaires** *Faites un des deux exercices 3 ou 4 au choix (l'exercice 4 est plus difficile).*

**Vecteurs** *L'exercice 5 est obligatoire.*

**Exercice 1** (Culture générale)**.** Citez un problème ouvert en mathématiques (c'est-à-dire un problème que personne au monde ne sait résoudre).

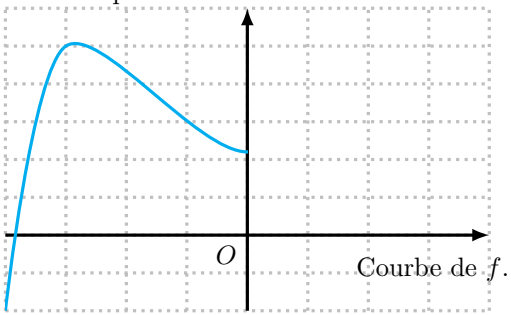
**Exercice 2** (Résolution d'équation)**.** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - x - 1$ et $g(x) = -6x + 1$.
L'objet de l'exercice est de résoudre de deux manières différentes l'équation $f(x) = g(x)$.

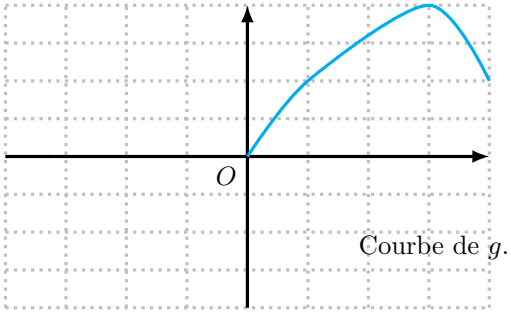
1. *Résolution graphique.* Un élève a tracé sur l'écran de sa calculatrice, ci-dessous, les courbes des fonctions $f$ et $g$.
   Résolvez l'équation $f(x) = g(x)$ par lecture graphique.




2. *Résolution algébrique (par le calcul)*
   (a) Montrez que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à : $(3x - 1)(x + 2) = 0$.
   (b) En déduire les solutions exactes de l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Dans ce cas-là, en quoi la résolution par le calcul est-elle meilleure que la résolution graphique ? Donnez deux arguments.

**Exercice 3** (Fonctions paires et impaires)**.** Les courbes des fonctions $f$ et $g$ sont partiellement représentées ci-dessous.




1. Complétez la courbe de $f$, sachant que cette fonction est *paire*.
2. Complétez la courbe de $g$, sachant que cette fonction est *impaire*.
3. On considère la fonction $h$, dont on connait ne connaît que le tableau de valeurs ci-dessous. Prouvez que la fonction $h$ n'est ni paire, ni impaire.

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $3$ | $8$ | $10$ | $-1$ | $8$ | $-6$ |

**Exercice 4** (Fonctions paires et impaires)**.** Dans cet exercice, on va prouver la propriété :

> Si une fonction $f$ a sa courbe représentative symétrique par rapport à l'origine, alors elle est impaire.

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Soit $M$ un point de la courbe, d'abscisse $x$, et $N$ son symétrique par rapport à l'origine.
*Remarquez bien qu'à ce stade, on ne sait pas encore que la fonction est impaire, donc on ne peut pas utiliser la propriété $f(-x) = -f(x)$ : il faudra la prouver.*

1. Rappelez les coordonnées de l'origine $O$ du repère.
2. Rappelez pourquoi les coordonnées de $M$ sont $(x; f(x))$.
3. *Les deux questions sont indépendantes.*
   (a) Montrez que les coordonnées de $N$ (symétrique de $M$ par rapport à l'origine $O$ du repère) sont $N\left(-x; -f(x)\right)$
   (b) Rappelez pourquoi $N$ est sur la courbe de la fonction $f$, et montrer que les coordonnées de $N$ sont $N\left(-x; f(-x)\right)$.
4. *Bilan :* En déduire que $f$ est impaire.

**Exercice 5** (Vecteurs)**.** *Aucune réponse par lecture graphique ne sera acceptée.*
On considère un parallélogramme $ABCD$, et le point $E$, image de $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

1. Tracez un parallélogramme $ABCD$ quelconque, et placer le point $E$.
2. Justifiez, en utilisant une égalité de vecteurs, que $ACEB$ est un parallélogramme.
3. (a) Montrez que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.
   (b) Que représente $C$ pour le segment $[DE]$ ? Justifiez.