

**Exercice.** Une entreprise produit et commercialise entre 0 et 20 tonnes d'engrais par jour.

Le bénéfice total, exprimé en centaines d'euros, réalisé pour la production de  $x$  tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction  $B$  définie sur l'intervalle  $[0; 20]$  par :

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 90$$

1. Calculer le bénéfice réalisé lorsque l'entreprise produit et vend 7 tonnes d'engrais.  
Le bénéfice est :

$$B(7) = -2 \times 7^2 + 36 \times 7 - 90 = 64$$

Donc le bénéfice est de 64 centaines d'euros, soit 64 000 euros.

2. (a) Vérifier que 3 est une racine du polynôme  $B(x)$ .

$$B(3) = -2 \times 3^2 + 36 \times 3 - 90 = 0$$

Donc 3 est bien une racine de  $B$ .

- (b) En déduire l'autre racine de  $B(x)$ .

Le polynôme  $B$  est de la forme :

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec  $a = -2$ ,  $x_1$  est la première racine  $x_1 = 3$ , et  $x_2$  est la seconde racine inconnue.

D'une part, on a :

$$B(0) = -2 \times 0^2 + 36 \times 0 - 90 = -90$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} B(0) &= -2(0 - 3)(0 - x_2) \\ &= -2 \times (-3) \times (-x_2) \\ &= -6x_2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} -90 &= -6x_2 \\ \frac{-90}{-6} &= x_2 \\ 15 &= x_2 \end{aligned}$$

La seconde racine est donc  $x_2 = 15$ .

- (c) Factoriser  $B(x)$ .

Donc  $B(x) = -2(x - 3)(x - 15)$ .

3. (a) Justifier que les coordonnées du sommet de la parabole de  $B$  sont  $(9, 72)$ .

L'abscisse du sommet est :

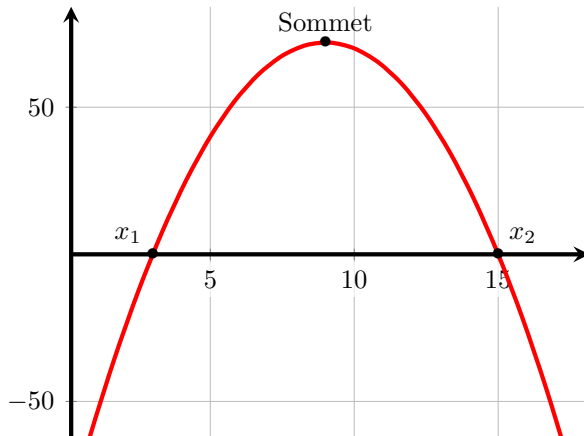
$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 15}{2} = 9$$

L'ordonnée du sommet est :

$$B(\alpha) = B(9) = -2 \times 9^2 + 36 \times 9 - 90 = 72$$

Donc les coordonnées du sommet sont  $(9; 72)$ .

- (b) Tracer l'allure de la courbe de  $B$ . La courbe est une parabole (car c'est un polynôme du second degré). Nous connaissons les coordonnées du sommet  $(9; 72)$ , et nous savons que la courbe coupe l'axe des abscisses en les racines  $x = 3$  et  $x = 15$ .



- (c) Dresser le tableau de signes de  $B$ .

$x$	0	3	15	20
$B(x)$		-	+	-

4. (a) Résoudre l'inéquation  $B(x) > 0$ .

D'après le tableau de signes, les solutions de  $B(x) > 0$  sont  $x \in ]3; 15[$ .

- (b) En déduire la quantité d'engrais, exprimée en tonnes, que l'entreprise doit produire et vendre pour faire un bénéfice.

Pour que l'entreprise fasse un bénéfice, il faut que  $B(x)$  soit positif, c'est-à-dire que  $x \in ]3; 15[$ , c'est-à-dire que l'entreprise produise entre 3 et 15 tonnes d'engrais.

5. Quelle quantité d'engrais faut-il vendre et produire pour obtenir un bénéfice maximal ? Justifier.

Pour que le bénéfice soit maximal, il faut regarder le sommet sur la courbe de  $B$ . Cela correspond à  $x = 9$ , donc il faut produire 9 tonnes d'engrais pour que le bénéfice soit maximal.

# Sujet C