2 Fonction dérivée

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *dérivable* sur I si elle est dérivable en tout nombre réel a de I.
On définit alors la *fonction dérivée de* f, notée f', qui à tout nombre x de I, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

Propriété (Dérivée des fonctions usuelles)**.** Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction		Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carrée	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple 1. On définit f et g par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Calculer les nombres suivants :

(a) $f(2) =$

(b) $f'(2) =$

(c) $g(4) =$

(d) $g'(4) =$

(e) $g(-1) =$

(f) $g'(-1) =$

Propriété (Opération sur les fonctions)**.** Soient u et v deux fonctions définie sur un intervalle I, et k un nombre réel.

— La fonction définie par $f(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = k \times u'(x)$.

— La fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple 2. Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$
2. $g(x) = 4x$
3. $h(x) = -2x^3$
4. $k(x) = 5x - 1$
5. $l(x) = 4x^2 - 2x + 1$
6. $m(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 7$

Exercice.

— 54 à 57 p. 152 ; 62 à 67 p. 152

— 59 p. 152

— 27, 28 p. 149

3 Dérivée et Variations

Propriété. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :
- si la fonction dérivée f' est strictement positive, alors la fonction f est croissante ;
- si la fonction dérivée f' est strictement négative, alors la fonction f est décroissante.

Exemple 3. Soit f une fonction. On connait le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f									

Exemple 4 (❤️). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

1. Déterminer l'expression de f'.
2. Dresser le tableau de signes de f'.
3. En déduire le tableau de variations de f.
4. Quels sont les extremums de f ?

Exemple 5 (❤️). On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 3(x+3)(x-1)$.
2. Dresser le tableau de signes de g'.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. Quels sont les extremums de g ?

Exercice.
- Exercices 80, 85 p. 153.
- Problèmes 93, 94 p. 154.