Exercice 1 (8 points — Inspiré du sujet d'EC n° 21). *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O; I; J)$ *, on considère les points* $A(-1; 2)$*,* $B(5; 10)$ *et* $C(3; 5)$*. Le but de l'exercice est de calculer l'aire du triangle* ABC*.*

1. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$*.*

   On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 10-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 \times 4 + 8 \times 3 = 48$$

2. (a) *Soit* D *le pied de la hauteur du triangle* ABC *issue de* C*. Justifier que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$*.*

   Puisque D est le pied de la hauteur issue de C, alors D est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

   (b) *En déduire que* $AD = 4,8$*.*

   D'une part, nous avons montré que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 48$.
   D'autre part : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. Or :

$$AB = \sqrt{(5-(-1))^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

   Donc, puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et dans le même sens, alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD = 10AD$$

   Donc :

$$\begin{aligned} 10AD &= 48 \\ AD &= \frac{48}{10} \\ AD &= 4,8 \end{aligned}$$

3. *Montrer que $CD = 1,4$.*

   Commençons par calculer AC :

$$AC = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-2)^2} = 5$$

   Le triangle ACD est rectangle en D (puisque $[CD]$ est une hauteur), donc nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore :

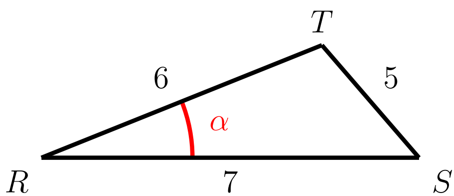
$$\begin{aligned} AC^2 &= CD^2 + AD^2 \\ 5^2 &= CD^2 + 4,8^2 \\ CD^2 &= 5^2 - 4,8^2 \\ CD^2 &= 1,96 \\ CD &= \sqrt{1,96} \\ CD &= 1,4 \end{aligned}$$

4. *En déduire l'aire du triangle ABC.*

   L'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur :

$$\mathcal{A} = \frac{CD \times AB}{2} = \frac{1,4 \times 10}{2} = 7$$

Exercice 2 (3 points)**.** *La figure n'est pas à l'échelle. Déterminer une mesure de l'angle α, arrondie au dixième de degrés près.*



Appliquons le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned}
TS^2 &= TR^2 + RS^2 - 2 \times TR \times RS \times \cos\alpha \\
5^2 &= 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos\alpha \\
25 &= 85 - 84\cos\alpha \\
-60 &= -84\cos\alpha \\
\frac{60}{84} &= \cos\alpha \\
\alpha &= \arccos\frac{60}{84} \\
\alpha &\approx 44{,}4^\circ
\end{aligned}$$

Exercice 3 (4 points)**.** *Soient $A\,(1;2)$ et $B\,(-2;3)$ deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé. On souhaite placer un troisième point sur la diagonale d'équation $y = x$, de telle sorte que le triangle ABC soit rectangle en A.*
On admet que les coordonnées de C sont $(x;x)$, pour une certaine valeur de x à déterminer.

1. *Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2x + 1$.*

   On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x-1 \\ x-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= -3(x-1) + 1(x-2) \\
&= -3x + 3 + x - 2 \\
&= -2x + 1
\end{aligned}$$

2. *En déduire coordonnées possibles pour C telles que le triangle ABC soit rectangle en A.*

Le triangle ABC est rectangle si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est nul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= 0\\ -2x+1 &= 0\\ -2x &= -1\\ x &= 0,5\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une unique solution : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les coordonnées de C sont $C(0,5;0,5)$.