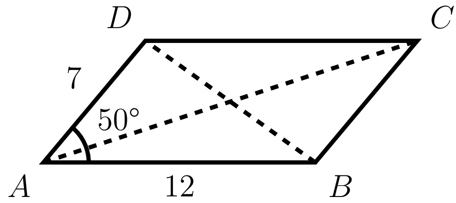
Exercice 1. On considère un parallélogramme $ABCD$, tel que $AB = 12$, $AD = 7$, et $\widehat{BAD} = 50°$ (la figure de droite n'est pas à l'échelle).
Le but de l'exercice est de déterminer la longueur AC.



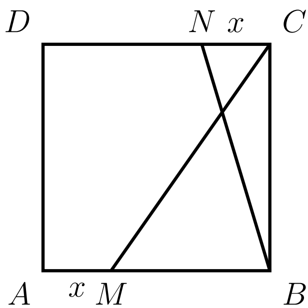
1. En utilisant une expression appropriée du produit scalaire, calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

On admet la propriété suivante : Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

2. En utilisant l'expression du produit scalaire introduite dans cet exercice, montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$.
3. En déduire la longueur AC, arrondie au dixième.

Exercice 2. On considère le carré $ABCD$ de côté 1, et x un nombre compris entre 0 et 1. On place le point M sur le segment $[AB]$,tel que $AM = x$, et N sur le segment $[CD]$, tel que $CN = x$. La situation est illustrée sur la figure suivante.
On se pose la question : Pour quelles valeurs de x les droites (BN) et (CM) sont-elles perpendiculaires ?



On se place dans le repère $(A; B; D)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées de B, C, N, M.
2. En déduire que $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-x\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\-1\end{pmatrix}$.
3. Montrer que les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si $-x^2 + x - 1 = 0$.
4. En déduire les solutions au problème posé.

Exercice 3. Voir les exercices 2 et 3 de la feuille d'exercices (application du théorème d'Al Kashi).