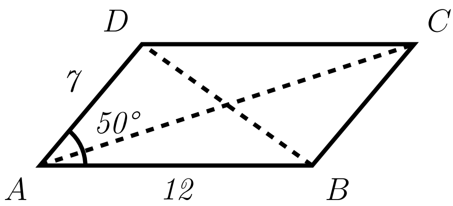
Exercice 1. *On considère un parallélogramme $ABCD$, tel que $AB = 12$, $AD = 7$, et $\widehat{BAD} = 50°$ (la figure de droite n'est pas à l'échelle). Le but de l'exercice est de déterminer la longueur AC.*



1. *En utilisant une expression appropriée du produit scalaire, calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.*
   On utilise l'expression avec le cosinus.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= AB \times AD \times \cos \widehat{BAD} \\ &= 12 \times 7 \times \cos 50° \\ &= 84 \cos 50°\end{aligned}$$

On admet la propriété suivante : Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

2. *En utilisant l'expression du produit scalaire introduite dans cet exercice, montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$.*
   Commençons par remarquer que puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - AB^2 - AD^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AC^2 - 12^2 - 7^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AC^2 - 193\right) \\ &= \frac{AC^2}{2} - \frac{193}{2} \\ &= \frac{AC^2}{2} - 96,5\end{aligned}$$

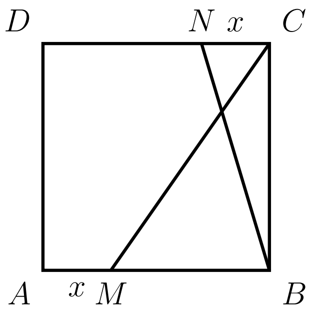
3. *En déduire la longueur AC, arrondie au dixième.*
   Nous avons montré, d'une part, que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 84\cos 50°$, et, d'autre part, que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{AC^2}{2} - 96,5 &= 84\cos 50° \\ \frac{AC^2}{2} &= 84\cos 50° + 96,5 \\ AC^2 &= 168\cos 50° + 193 \\ AC &= \sqrt{168\cos 50° + 193} \end{aligned}$$

   Nous avons exclu la solution négative $AC = -\sqrt{\cdots}$ car AC est une longueur, donc positive. Ainsi :

$$AC \approx 17,3$$

Exercice 2. *On considère le carré $ABCD$ de côté 1, et x un nombre compris entre 0 et 1. On place le point M sur le segment $[AB]$,tel que $AM = x$, et N sur le segment $[CD]$, tel que $CN = x$. La situation est illustrée sur la figure suivante.*
On se pose la question : Pour quelles valeurs de x les droites (BN) et (CM) sont-elles perpendiculaires ?



On se place dans le repère $(A; B; D)$.

1. *Sans justifier, donner les coordonnées de B, C, N, M.*
   On a : $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $N\begin{pmatrix}1-x\\1\end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$.
2. *En déduire que $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-x\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\-1\end{pmatrix}$.*

$$\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N - x_B\\ y_M - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - x - 1\\ 1 - 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ 1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M - x_C\\ y_M - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - 1\\ 0 - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - 1\\ -1\end{pmatrix}$$

3. *Montrer que les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si $-x^2 + x - 1 = 0$.*
   Les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM}$ est nul, c'est-à-dire si :
   $$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{BN}} \times x_{\overrightarrow{CM}} + y_{\overrightarrow{BN}} \times y_{\overrightarrow{CM}} &= 0\\ -x \times (x-1) + 1 \times (-1) &= 0\\ -x^2 + x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

4. *En déduire les solutions au problème posé.* Le polynôme $-x^2 + x - 1$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3$. Ce discriminant est nul, donc le polynôme n'a pas de racines. Donc il n'existe pas de valeurs de x pour lesquelles le produit scalaire est nul, donc les droites (BN) et (CM) ne sont jamais parallèles, quelle que soit la valeur de x.

Exercice 3. *Voir les exercices 2 et 3 de la feuille d'exercices (application du théorème d'Al Kashi).* Exercices corrigés en classe.