

Exercice 1 (8 points — D'après le sujet d'EC n° 15). Une entreprise produit du tissu. Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?

La fabrication de 3 km de tissu a coûté $C(3) = 15 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 3 + 750 = 1575$ euros, et a rapporté $680 \times 3 = 2040$ euros, soit un résultat de $2040 - 1575 = 465$ euros.

2. Montrer que : $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

Pour une longueur de tissu x , la recette est $680x$, et le coût est $C(x)$. Donc le résultat est :

$$\begin{aligned} R(x) &= 680x - C(x) \\ &= 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) \\ &= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 \\ &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750 \end{aligned}$$

3. Donner une expression de $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B .

On a $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$, donc :

$$\begin{aligned} B'(x) &= -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 \\ &= -45x^2 + 240x + 180 \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0; 10]$ puis le tableau de variations de la fonction B .

La fonction B' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000$. Il a donc deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-240 - \sqrt{90000}}{2 \times (-45)} = \frac{-240 - 300}{-90} = \frac{-540}{-90} = 6 \\ x_2 &= \frac{-240 + \sqrt{90000}}{2 \times (-45)} = \frac{-240 + 300}{-90} = \frac{60}{-90} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Traçons le tableau de signes de B' , et le tableau de variations de B sur $]-\infty; +\infty[$ (même si le domaine de définition de B est seulement $[0; 10]$).

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	6	$+\infty$
B'		$-$	$+$	$-$
B			1410	

Avec : $B(6) = -15 \times 6^3 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 750 = 1410$, et de même :
 $B\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{7310}{9}$.

5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

Le maximum de B sur l'intervalle $[0; 10]$ est 1 410, atteint pour $x = 6$, donc l'entreprise doit produire 6 km de tissu pour que son résultat soit maximal.

Exercice 2 (7 points). Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :

$$\frac{x^2 + 3}{x + 1} \geq 2$$

On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (tous les nombres réels sauf -1) la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

1. Montrer que pour tout x de son domaine de définition, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + 3 & v(x) &= x + 1 \\ u'(x) &= 2x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2} \\
 &= \frac{2x \times (x+1) - 1 \times (x^2+3)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

2. Montrer que le tableau de signes de f' est :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+

Étudions séparément le numérateur et le dénominateur de f .

- Le numérateur $x^2 + 2x - 3$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$, et de racines $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2+4}{2} = 1$.
- Le dénominateur $(x+1)^2$ est un carré, donc toujours strictement positif (sauf en -1 , exclu du domaine de définition).

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	-	0	+
$(x+1)^2$	+	+	+	+	+	
$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$	+	0	-	-	0	+
f		-6		2		

Avec $f(-3) = \frac{(-3)^2+3}{-3+1} = \frac{12}{-2} = -6$ et $f(1) = \frac{1^2+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

3. *En déduire le tableau de variations de f . Voir la question précédente.*

4. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.*

Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, le maximum de f est -6 , donc l'inéquation $f(x) \geq 2$ n'a aucune solution.

Sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, le minimum de f est 2 , donc toutes les valeurs de cet intervalle sont solutions.

Les solutions de l'inéquation sont donc $]-1; +\infty[$.