

Exercice 1 (Inéquation). *L'objet de l'exercice est de résoudre l'inéquation suivante.*

$$2x^3 - 4x^2 - 10x - 24 \geq 0$$

C'est une inéquation du troisième degré, sans factorisation évidente, donc nous ne connaissons pas de méthode générale pour la résoudre.

On pose $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 - 10x - 24$.

- En utilisant la dérivée, montrez que le tableau de variations de f est le suivant.*

Commençons par dériver la fonction f .

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 10x - 24 \\ f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 4 \times 2x - 10 \\ &= 6x^2 - 8x - 10 \end{aligned}$$

Donc f' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 6 \times (-10) = 304$. Il est positif, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-8) - \sqrt{304}}{2 \times 6} = \frac{8 - 4\sqrt{19}}{12} = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \\ x_2 &= \frac{-(-8) + \sqrt{304}}{2 \times 6} = \frac{8 + 4\sqrt{19}}{12} = \frac{2 + \sqrt{19}}{3} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc tracer le tableau de signes de f' , et en déduire le tableau des variations.

x	$-\infty$	$\frac{2 - \sqrt{19}}{3}$	$\frac{2 + \sqrt{19}}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
f		\nearrow	-19,6	\searrow	-44,1	\nearrow

- Complétez, sur le tableau précédent, les valeurs approchées des extremums de f (avec une précision qui vous semble pertinente). Nous avons calculé $f\left(\frac{2 - \sqrt{19}}{3}\right) \approx -19,6$, et $f\left(\frac{2 + \sqrt{19}}{3}\right) \approx -44,1$, et reporté les données sur le tableau de variations de la question précédente.*

3. Calculez $f(4)$.

$$f(4) = 2 \times 4^3 - 4 \times 4^2 - 10 \times 4 - 24 = 0$$

4. En déduire les solutions de l'inéquation.

D'une part, sur l'intervalle $\left] -\infty; \frac{2+\sqrt{19}}{3} \right]$, le maximum de la fonction f est $-19,6$ environ, donc l'inéquation $f(x) \geq 0$ n'a pas de solutions.

D'autre part, sur l'intervalle $\left[\frac{2+\sqrt{19}}{3}; +\infty \right[$, la fonction f est strictement croissante, et passe par 0 en $x = 4$. Donc sur cet intervalle (et sur l'ensemble des réels), les solutions de $f(x) \geq 0$ sont $\boxed{x \geq 4}$.

Exercice 2 (Optimisation). On définit sur \mathbb{R} la fonction f par $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$. L'objet de l'exercice est de déterminer ses extremums.

1. Montrez que pour tout x de son domaine de définition, on a :

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2}$$

La fonction f est de la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 1+x & v(x) &= 1+x^2 \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Nous calculons donc sa dérivée avec la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (1+x^2) - 2x \times (1+x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - 2x - 2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

2. Recopiez et complétez le tableau de signes suivant, en justifiant.

D'une part, le numérateur $-x^2 - 2x + 1$ est un polynôme de second degré, de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$, et de racines $x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = -1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = -1 - \sqrt{2}$.

D'autre part, le dénominateur $(1 + x^2)^2$ est un carré, donc il est toujours strictement positif.

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$		
$-x^2 - 2x + 1$		-	0	+	0	-
$(1 + x^2)^2$		+		+		+
$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 + x^2)^2}$		-	0	+	0	-
f					1,2	
						-0,2

3. En déduire le tableau de variations de f (n'oubliez pas de calculer la valeur des extremums, arrondies au dixième).

Fait dans la question précédente.

4. Donnez les extremums de f , en précisant pour quelles valeurs de x ils sont atteints, ainsi que s'il s'agit d'extremums locaux ou globaux.

Le nombre 1,2 est un maximum local de f , atteint en $x = -1 + \sqrt{2}$.

Le nombre 0,2 est un minimum local de f , atteint en $x = -1 - \sqrt{2}$.

Nous ne savons pas si ces extremums sont des extremums globaux ou pas, car nous ne connaissons pas le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$ (vous verrez cela l'an prochain).

Exercice 3 (Un chouïa au delà de ce que je peux vous demander en devoir).
L'objet de l'exercice est d'écrire une fonction en Python qui donne les variations des fonctions homographiques de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$).

Soit f une telle fonction.

1. *Quel est le domaine de définition de f ?*

La fonction f est un quotient, donc elle est définie si son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire si $cx + d \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq -\frac{d}{c}$. Donc f est définie sur tous les nombres réels, sauf $-\frac{d}{c}$, que l'on peut aussi noter $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

2. *Montrez que pour tout x de son domaine de définition, on a :*

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec

$$\begin{aligned} u(x) &= ax + b & v(x) &= cx + d \\ u'(x) &= a & v'(x) &= c \end{aligned}$$

Donc sa dérivée est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a \times (cx + d) - c \times (ax + b)}{(cx + d)^2} \\ &= \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx + d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \end{aligned}$$

3. *Dressez le tableau de signes de f' ainsi que le tableau de variations de f . ⚠ Attention : Il y a deux cas possibles.*

Commençons par remarquer que puisque le dénominateur $(cx + d)^2$ est un carré, il est toujours positif.

Premier cas : $ad - bc > 0$ Alors le quotient $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ est un quotient de deux nombres strictement positifs : il est lui même positif. Donc $f'(x) > 0$, et la fonction f est strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Deuxième cas : $ad - bc < 0$ Alors le quotient $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ est un quotient d'un nombre strictement négatif, et d'un nombre strictement positif : il est donc strictement négatif. Donc $f'(x) < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

4. Complétez la fonction Python suivante, qui affiche (en une phrase) les variations de f , en fonction des paramètres a, b, c, d de f . ⚠ Attention : la phrase affichée dans cette ébauche de fonction n'est qu'un exemple, et sera probablement réécrite entièrement.

```
def variations_homographiques(a, b, c, d):
    if a*d-b*c > 0:
        print("La fonction f est strictement
              croissante jusqu'à -d/c, puis
              strictement croissante après.")
    else:
        print("La fonction f est strictement
              décroissante jusqu'à -d/c, puis
              strictement décroissante après.")
```