

**Exercice 1.** Pour chacune des suites  $u$  suivantes : (i) calculer  $u_2$  ; (ii) calculer le troisième terme ; (iii) calculer le terme de rang 4. Arrondir les résultats au centième si nécessaire.

1. La suite  $u$  de premier terme  $u_0 = 3$  et telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = 2u_n - 1$ .

Calculons les premiers termes de  $u$ .

- Premier terme :  $u_0 = 3$ .
- Second terme :  $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ .
- Troisième terme :  $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$ .
- Quatrième terme :  $u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$ .
- Cinquième terme :  $u_4 = 2u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$ .

Donc :

- (i)  $u_2 = 9$  ;
  - (ii) le troisième terme est  $u_2 = 9$  ;
  - (iii) le terme de rang 4 est  $u_4 = 33$ .
2. La suite  $u$  définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = \frac{1}{2^n}$ .
- (i)  $u_2 = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$
  - (ii) Puisque le premier terme est  $u_1$ , le troisième terme est  $u_3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ .
  - (iii) Le terme de rang 4 est  $u_4 = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$ .

**Exercice 2.** On considère les suites  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = \frac{4^n}{9} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$$

1. Prouver que  $u$  est géométrique.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{4^{n+1}}{9}}{\frac{4^n}{9}} \\ &= \frac{4^{n+1} \times 9}{4^n \times 9} \\ &= 4^{n+1-n} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc la suite  $u$  est géométrique de raison 4.

2. Prouver que  $v$  n'est pas arithmétique.

Calculons les premiers termes :

- $v_0 = 7$  ;
- $v_1 = 2 \times v_0 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$  ;
- $v_2 = 2 \times v_1 - 3 = 2 \times 11 - 3 = 29$ .

Donc  $v_2 - v_1 = 29 - 11 = 18$ , et  $v_1 - v_0 = 11 - 7 = 4$ . Ainsi,  $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$ , et la suite n'est pas arithmétique.

**Exercice 3.** On considère une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  tous les deux inconnus. On sait en revanche que  $u_{42} + u_{256} = 454$ , et que  $u_{101} = 149$ .

1. Exprimer  $u_{42}$  et  $u_{256}$  en fonction de  $u_{101}$  et  $r$ .

On a :

- $u_{42} = u_{101} + r \times (42 - 101) = u_{101} - 59r$
- $u_{256} = u_{101} + r \times (256 - 101) = u_{101} + 155r$

2. En déduire que  $298 + 96r = 454$ . Puisque  $u_{42} + u_{256} = 454$ , alors :

$$\begin{aligned} u_{42} + u_{256} &= 454 \\ u_{101} - 59r + u_{101} + 155r &= 454 \\ 2u_{101} + 96r &= 454 \\ 2 \times 149 + 96r &= 454 \\ 298 + 96r &= 454 \end{aligned}$$

3. En déduire les valeurs de  $u_0$  et  $r$ . Puisque  $298 + 96r = 454$ , alors  $96r = 156$  et  $r = \frac{156}{96} = 1,625$ . Et donc :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{101} + (0 - 101) \times r \\ &= 149 - 101 \times 1,625 \\ &= -15,125 \end{aligned}$$

**Exercice 4.** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1,4u_n - 1,5 \end{cases}$$

On admet que cette suite est décroissante, et on souhaite connaître le rang du premier terme négatif. Nous allons répondre à cette question de deux manières différentes.

1. *Python* : Complétez la fonction ci-contre pour qu'elle renvoie le résultat demandé.

```
def suite():  
    n = 0  
    u = 3  
    while u > 0:  
        u = 1.4*u-1.5  
        n = n + 1  
    return n
```

2. *Calculatrice* : Sans justifier, à l'aide du module suites de votre calculatrice, répondre au problème.

On obtient :  $n = 5$ .

**Exercice 5.** À partir de ses dix ans, les parents de Lena lui donnent 10€ chaque mois l'année de ses dix ans, puis 11€ chaque mois l'année de ses 11 ans, et ainsi de suite jusqu'à l'année de ses 25 ans (inclusive). L'objet de l'exercice est de calculer la somme totale reçue par Lena.

On note  $u$  la suite définie par «  $u_n$  est la somme reçue par Lena durant sa  $n^e$  année ». On admet que  $u$  est une suite arithmétique.

1. Justifier que le premier terme est  $u_{10} = 120$ , et sa raison est 12.

L'année de ses dix ans, Lena gagne 10€ par mois pendant douze mois, soit  $12 \times 10 = 120$  euros.

Chaque année, elle gagne 1€ par mois de plus que l'année précédente, soit 12€ de plus sur toute l'année. Donc la raison est 12.

2. Déterminer la somme d'argent reçue par Lena entre l'année de ses 10 ans et la fin de l'année de ses 25 ans.

On cherche la somme des termes de  $u_{10}$  à  $u_{25}$ . On sait que  $u_{10} = 120$ ; calculons  $u_{25}$ .

$$u_{25} = u_{10} + (25 - 10) \times 12 = 120 + 15 \times 12 = 300$$

$$\begin{aligned}u_{10} + u_{11} + \dots + u_{25} &= 16 \times \frac{u_{10} + u_{25}}{2} \\ &= 16 \times \frac{120 + 300}{2} \\ &= 3360\end{aligned}$$

Elle recevra au total 3 360 €.

**Exercice 6.** *Voir la correction faite en classe.*