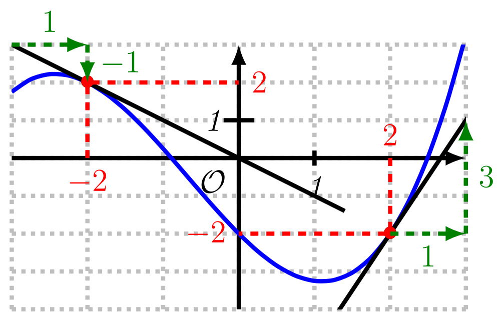
Exercice 1 (4 points)**.** *On considère la fonction f, dont voici la représentation graphique. On a également tracé deux tangentes, aux points d'abscisses -2 et 2.*



1. *Donner une valeur approchée des nombres suivants, par lecture graphique :* (a) $f(-2) = 2$ (b) $f'(-2) = -1$ (c) $f(2) = -2$ (d) $f'(2) = 3$.
2. *Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = 2$.*

   L'équation de la tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, avec :

   - $a = 2$
   - $f(a) = f(2) = -2$
   - $f'(a) = f'(2) = 3$

   Donc l'équation est :

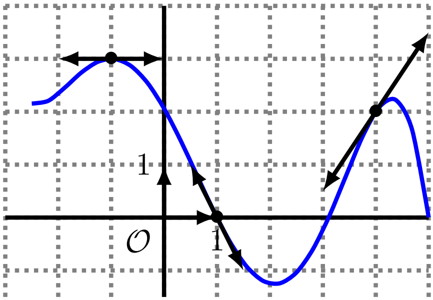
$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ y &= 3\,(x-2) + (-2) \\ y &= 3x - 6 - 2 \\ y &= 3x - 8 \end{aligned}$$

   L'équation est : $\boxed{y = 3x - 8}$.

Exercice 2 (3 points)**.** *On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dont on connait le tableau de valeurs suivant.*

x	-1	1	4
$f(x)$	3	0	2
$f'(x)$	0	-2	$1{,}5$

0. *Tracer sur votre copie un repère orthonormé allant de -2 à 5 en abscisses, et de -3 à 4 en ordonnées.*
1. *Placer sur ce graphique les trois points connus de la courbe de f, ainsi que les tangentes en ces points.*
2. *Tracer une courbe compatible avec ce tableau.*



Exercice 3 (2 points). *On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:*

$$f : x \mapsto (x+2)\sqrt{x}$$

1. *Dériver la fonction f. Il n'est pas nécessaire de simplifer l'expression obtenue.*
   La fonction est de la forme $f = u \times v$, avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 1 \times \sqrt{x} + (x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x+2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Bonus (1 point) : *Exprimer $f'(x)$ sous la forme d'une seule fraction,*

sans racine carrée au dénominateur.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{x} + \frac{x+2}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} \times \frac{2x}{2x} + \frac{x+2}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{2x\sqrt{x}}{2x} + \frac{(x+2)\sqrt{x}}{2x} \\
&= \frac{2x\sqrt{x} + (x+2)\sqrt{x}}{2x} \\
&= \frac{(2x+x+2)\sqrt{x}}{2x} \\
&= \frac{(3x+2)\sqrt{x}}{2x}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points)**.** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$. On se demande combien la courbe de cette fonction admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses.*
On rappelle qu'une droite est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur est égal à 0.

1. *Montrer que $f'(x) = \frac{13}{(x+5)^2}$.*
   La fonction f est une fraction, de la forme $f = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x + 5$. Donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = 2$, et :

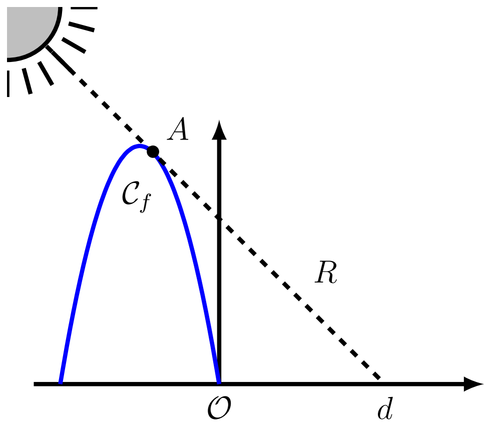
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{2(x+5) - 1(2x-3)}{(x+5)^2} \\
&= \frac{2x+10-2x+3}{(x+5)^2} \\
&= \frac{13}{(x+5)^2}
\end{aligned}$$

2. *Résoudre $f'(x) = 0$, et en déduire la réponse au problème posé.*
   L'équation $f'(x) = 0$ est équivalente à $\frac{13}{(x+5)^2}$. Or une fraction est nulle si son numérateur (le nombre du dessus) est nul, donc $\frac{13}{(x+5)^2} = 0$ si

$13 = 0$, ce qui est impossible. Donc l'équation n'a pas de solution, et aucune des tangente à la courbe de f n'est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 5 (7 points)**.** *Pour réaliser une installation, une artiste a besoin de savoir où sera projetée l'ombre d'une sculpture.*
Elle souhaite savoir à quelle distance d sera projetée l'ombre de la sculpture à midi, début septembre, quand les rayons solaires auront une inclinaison de 45° (c'est-à-dire un coefficient directeur de -1).
Le problème est modélisé en deux dimensions sur le schéma ci-contre, où un repère orthonormé a été choisi avec pour origine la base de la sculpture. L'unité est de mètre. La sculpture peut-être représenté par la courbe de la fonction :

$$f : x \mapsto -2x^2 - 6x.$$



On appelle R la droite modélisant le rayon du soleil définissant la limite de l'ombre, et A le point d'intersection entre cette droite et la courbe. On remarque que R est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. *Calculer $f'(x)$.*

   La fonction f est un polynôme, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times 2x - 6 \\ &= -4x - 6 \end{aligned}$$

2. *Montrer l'unique solution de $f'(x) = -1$ est $x = -\frac{5}{4}$.*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -1 \\
-4x - 6 &= -1 \\
-4x &= 5 \\
x &= \frac{5}{-4} \\
x &= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

3. *Montrer que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $-\frac{5}{4}$ est $y = -x + 3,125$.*
   L'équation de la tangente est $y = f'(x)(x - a) + f(a)$, avec :
   - $a = -\frac{5}{4}$
   - $f(a) = f\left(-\frac{5}{4}\right) = 4,375$
   - $f'(a) = f'\left(-\frac{5}{4}\right) = -1$

   L'équation est donc :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\
y &= -1\left(x - \left(-\frac{5}{4}\right)\right) + 4,375 \\
y &= -(x + 1,25) + 4,375 \\
y &= -x - 1,25 + 4,375 \\
y &= -x + 3,125
\end{aligned}$$

4. *Déterminer le point d'intersection de R et de l'axe des abscisses, et en déduire à quelle distance de la base de la sculpture arrivera l'ombre ce jour-là.*
   Le point d'intersection de la tangente R avec l'axe des abscisses est atteint pour $y = 0$, soit :

$$\begin{aligned}
0 &= -x + 3,125 \\
x &= 3,125
\end{aligned}$$

   Donc l'ombre arrivera à 3,125 m de la sculpture ce jour-là.