1 Définitions

Définition. Étant donné une expérience aléatoire d'univers Ω, on appelle ____________________ une fonction X définie sur Ω et à valeur dans dans $\mathbb{R}$.

Définition. Étant donné une variable aléatoire X, on définit les évènements suivants :

- $\{X = x\}$: l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x.
- $\{X \geqslant x\}$: l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x.

Les évènements $\{X \leqslant x\}$; $\{X < x\}$; $\{X > x\}$ sont définies de la même manière.

Exemple 1. On répond au hasard à un questionnaire à choix multiples composé de 4 questions. On note par exemple : $JJFJ$ l'issues « on a choisi la réponse juste aux deux premières questions, puis une réponse fausse, puis la réponse juste ».
On définit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réponses justes.
Lister les issues des évènements suivants : (a) $\{X = 4\}$ (b) $\{X = 1\}$ (c) $\{X \geqslant 3\}$ (d) $\{X < 2\}$

Définition.

— La probabilité de l'évènement $\{X = x\}$ est la somme des probabilités des issues de Ω auxquelles on associe x par la variable aléatoire X.

— La ____________________ de X, généralement présentée sous la forme d'un tableau, est la donnée de chacune des probabilités de $\{X = x\}$, pour toutes les valeurs possibles de x.

Exemple 2. On répond aux hasard à un QCM composé de trois questions. Chaque question a quatre réponses possibles, dont une seule correcte, et on y répond en utilisant un dé équilibré à quatre faces.
On appelle X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réponses possibles.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux réponses justes ?

2 Espérance, Variance, Écart-type

Définition. L'espérance d'une variable aléatoire X (prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n) est le nombre réel $E(X)$, donné par la formule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots + x_n P(X = x_n)$$

Remarque. L'espérance d'une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire correspond à la __________ obtenue en répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois.

Exemple 3. Toute une classe a répondu au hasard au QCM de l'exemple 2. Quelle est le nombre moyen de réponses justes obtenu par les élèves ?

Définition. Étant donné une variable aléatoire X (prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n) on définit :

- la variance $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$
- l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété. On peut aussi calculer la variance d'une variable aléatoire X comme :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Remarque.

— L'espérance est un indicateur de *position* de la variable aléatoire.

— La variance et l'écart-type sont des indicateurs de *dispersion* de la variable aléatoire.

Exemple 4. Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire définie à l'exemple 2.