

**Exercice 1.** *Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 30 minutes de communication une fois sur six, 20 minutes une fois sur trois et 10 minutes sinon.*

*On appelle  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.*

1. *Donner la loi de probabilité de  $X$ , sous la forme d'un tableau. Voici la loi de probabilités.*

$x$	10	20	30
$P(X = x)$	$p$	1/3	1/6

La probabilité  $p$  de gagner 10 minutes de communication est inconnue, mais la somme des probabilités des issues est égale à 1, donc  $p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ , donc  $p = \frac{1}{2}$ . Donc :

$x$	10	20	30
$P(X = x)$	1/2	1/3	1/6

2. *Calculer l'espérance la variable aléatoire  $X$ .*

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 10 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{3} + 30 \times \frac{1}{6} \\
 &= 10 \times \frac{3}{6} + 20 \times \frac{2}{6} + 30 \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{10 \times 3 + 20 \times 2 + 30 \times 1}{6} \\
 &= \frac{100}{6} \\
 &= \frac{50}{3}
 \end{aligned}$$

3. *Que représente cette espérance ?* Cette espérance représente le gain moyen des clients. En moyenne, en répondant au sondage, ils gagnent  $\frac{50}{3} \approx 16,7$  minutes de communication.

**Exercice 2.** *Un casino imagine un nouveau jeu, très simple. Une joueuse mise une somme d'argent  $m$ , de son choix, puis lance un dé.*

- *si elle obtient 1 ou 2, elle a perdu sa mise ;*
- *si elle obtient 6, elle gagne  $a$  fois sa mise (pour un certain nombre  $a$  à déterminer) ;*
- *sinon, elle reprend sa mise.*

*On appelle  $X$  la variable aléatoire qui au résultat du dé associe le gain algébrique du jeu.*

1. *Montrer que la loi de probabilité de  $X$  est la suivante.*

$$\frac{x}{P(X = x)} \quad \left\| \begin{array}{c|c|c} -m & 0 & a \times m \\ \hline 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{array} \right.$$

- Si la joueuse obtient 1 ou 2 (deux chances sur six sur un dé équilibré), elle perd sa mise, donc le gain algébrique est  $-m$  ;
- si elle obtient 6 (une chance sur 6), elle gagne  $a$  fois sa mise, donc son gain est  $a \times m$  ;
- sinon (probabilité de  $1 - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ ), elle reprend sa mise, donc elle n'a rien gagné.

Cela donne la loi de probabilités données dans l'énoncé.

2. Calculer l'espérance  $E(X)$  de  $X$  (en fonction de  $m$  et  $a$ ).

$$\begin{aligned} E(X) &= -m \times \frac{2}{6} + 0 \times 36 + a \times m \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{-2m + 0 + a \times m}{6} \\ &= \frac{(a-2)m}{6} \end{aligned}$$

L'espérance est donc  $\frac{(a-2)m}{6}$ .

3. Quelles valeurs peut prendre  $a$  pour que le casino ne perde pas d'argent ? Pour que le casino ne perde pas d'argent, il faut que les joueurs en perde, c'est-à-dire que  $E(X) \leq 0$  :

$$\begin{aligned} E(X) &\leq 0 \\ \frac{(a-2)m}{6} &\leq 0 \\ (a-2)m &\leq 0 \\ a-2 &\leq 0 \\ a &\leq 2 \end{aligned}$$

Donc pour que le casino ne perde pas d'argent, il faut que  $a \leq 2$ . En d'autres termes, sur un 6, la joueuse doit gagner moins de deux fois sa mise.