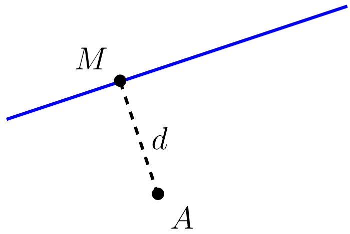
Lisez et comprenez ce document.

Définition et Propriété. On appelle distance d'un point A à une droite la plus petite distance entre un point de cette droite et A. Cette distance est obtenue avec le projeté orthogonal de A sur la droite.



Exemple. *Soit* $A(2;8)$ *un point du plan muni d'un repère orthonormé, et* d *la droite d'équation* $3x - 4y + 8 = 0$*. Quelle est la distance de* A *à* d *?*
Soit $M\binom{x}{y}$ le projeté orthogonal de A sur la droite d. Il faut donc calculer la distance AM. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à la droite : calculons la valeur absolue du produit scalaire $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|$ de deux manières différentes.
Remarquons d'abord que puisque l'équation de la droite est $3x - 4y + 8 = 0$, alors nous pouvons prendre $\overrightarrow{n}\binom{3}{-4}$ comme vecteur normal.

— D'une part, puisque M est le projeté orthogonal de A sur la droite, alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur normal à la droite, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right| \times ||\overrightarrow{n}||$ ou $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = -\left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right| \times ||\overrightarrow{n}||$. Mais puisque seule la valeur absolue nous intéresse, nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| &= \left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right| \times ||\overrightarrow{n}|| \\ &= AM \times ||\overrightarrow{n}|| \\ &= AM \times \sqrt{a^2+b^2} \\ &= AM \times \sqrt{3^2+(-4)^2} \\ &= 5AM\end{aligned}$$

— D'autre part, puisque les coordonnées de A sont $A\binom{2}{8}$, alors $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-8}$, et donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} &= (x-2)\times 3 + (y-8)\times(-4)\\ &= 3x - 6 - 4y + 32\\ &= 3x - 4y + 26\end{aligned}$$

Ensuite, puisque le point M est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $3x4y + 8 = 0$, donc $3x - 4y = -8$:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 3x - 4y + 26 = -8 + 26 = 18$$

Et donc $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| = |18| = 18$.

Nous avons montré, d'une part, que $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| = 5AM$, et d'autre part, que $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| = 18$. Donc :

$$\begin{aligned}5AM &= 18\\ AM &= \frac{18}{5}\\ AM &= 3,6\end{aligned}$$

La distance de A à la droite est donc $3,6$.