Théorème : Propriété page 257 du manuel

Soient A et B deux points fixés. L'ensemble des points $M\,(x;y)$ du plan tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration. Votre manuel propose une démonstration de cette propriété, mais c'est une démonstration « calculatoire » : on fait un gros calcul, en comprenant à moitié seulement pourquoi on le fait, et on ne sait pas trop comment on est arrivé au résultat final. Je vous propose une démonstration à l'aide des produits scalaires, sans aucun calcul.

Soit A et B deux points distincts, et M un point du plan. Deux cas sont alors possibles :

1. Le point M est un des deux points A ou B. Alors M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ (car l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ ou $\overrightarrow{BM}$ est nul).
2. Le point M n'est pas un des deux points A ou B. Alors $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.

   Or un point (distinct) de A est B est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires, donc le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ est nul si et seulement si le point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Dans les deux cas, le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ est nul si et seulement si le point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. $\square$