Exercice 1 (Exercice du cours (pas du manuel)). *Soit* $A(-1;10)$ *un point du plan muni d'un repère orthonormé, et* d *la droite d'équation* $5x+12y-2=0$. *Quelle est la distance de* A *à* d *?*
Soit $M\binom{x}{y}$ le projeté orthogonal de A sur la droite d. La distance du point A à la droite d est donc la longueur AM, qu'il faut calculer.
Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à la droite : calculons la valeur absolue du produit scalaire $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|$ de deux manières différentes.
Remarquons d'abord que puisque l'équation de la droite est $5x+12y-2=0$, alors nous pouvons prendre $\overrightarrow{n}\binom{5}{12}$ comme vecteur normal.

— D'une part, puisque M est le projeté orthogonal de A sur la droite, alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur normal à la droite, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right| \times ||\overrightarrow{n}||$ ou $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = -\left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right| \times ||\overrightarrow{n}||$. Mais puisque seule la valeur absolue nous intéresse, nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| &= \left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right| \times ||\overrightarrow{n}|| \\
&= AM \times ||\overrightarrow{n}|| \\
&= AM \times \sqrt{a^2+b^2} \\
&= AM \times \sqrt{5^2+12^2} \\
&= 13AM
\end{aligned}$$

— D'autre part, puisque les coordonnées de A sont $A\binom{-1}{10}$, alors $\overrightarrow{AM}\binom{x+1}{y-10}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} &= (x+1)\times 5 + (y-10)\times 12 \\
&= 5x+5+12y-120 \\
&= 5x+12y-115
\end{aligned}$$

Ensuite, puisque le point M est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $5x+12y-2=0$, donc $5x+12y=2$:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 5x+12y-115 = 2-115 = -113$$

Et donc $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| = |-113| = 113$.

Nous avons montré, d'une part, que $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| = 13AM$, et d'autre part, que $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right| = 113$. Donc :

$$\begin{aligned} 13AM &= 113 \\ AM &= \frac{113}{13} \end{aligned}$$

La distance de A à la droite est donc $\frac{113}{13}$.

Exercice 69. *Corrigé dans le manuel...*

Exercice 70. *Corrigé dans le manuel...*

Exercice 73.

1. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Ce point est sur la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0$ (c'est-à-dire si A et M sont confondus (auquel cas M est sur la droite), ou $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux (donc les droites sont parallèles)).
   Or $\overrightarrow{AM}\binom{x-1}{y-4}$ et $\overrightarrow{u}\binom{-4}{3}$, donc M est sur la droite si et seulement si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0 \\ (x-1)\times(-4) + (y-4)\times 3 &= 0 \\ -4x + 4 + 3y - 12 &= 0 \\ -4x + 3y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

   Une équation de la droite perpendiculaire à (BC) passant par A est donc $\boxed{-4x + 3y - 8 = 0}$.

2. Soit $M\,(x;y)$ un point du plan. Ce point est sur la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ (en effet, $\overrightarrow{AM}$ est alors un vecteur directeur de la droite recherchée,

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de (BC), et leur produit scalaire est nul si $M = A$ ou si les deux vecteurs sont orthogonaux).

Or $\overrightarrow{AM}\binom{x}{y-3}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{-7}{4}$, donc M est sur la droite recherchée si et seulement si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} &= 0 \\ x \times (-7) + (y-3) \times 4 &= 0 \\ -7x + 4y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Une équation de la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) est donc $\boxed{-7x + 4y - 12 = 0}$.

3. Puisque la droite (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées, le vecteur $\overrightarrow{u}\binom{0}{1}$ est un vecteur directeur de cette droite.

   Soit $M\,(x; y)$ un point du plan (et donc $\overrightarrow{AM}\binom{x+5}{y-7}$). Ce point appartient à la droite passant par A est perpendiculaire à (BC) si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}$ est nul, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0 \\ (x+5) \times 0 + (y-7) \times 1 &= 0 \\ y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

   Donc une équation de la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) est $\boxed{y - 7 = 0}$.