Exercice 1 (D'après l'exercice 1 du sujet de baccalauréat S, Antilles-Guyane, 18 juin 2019)**.**

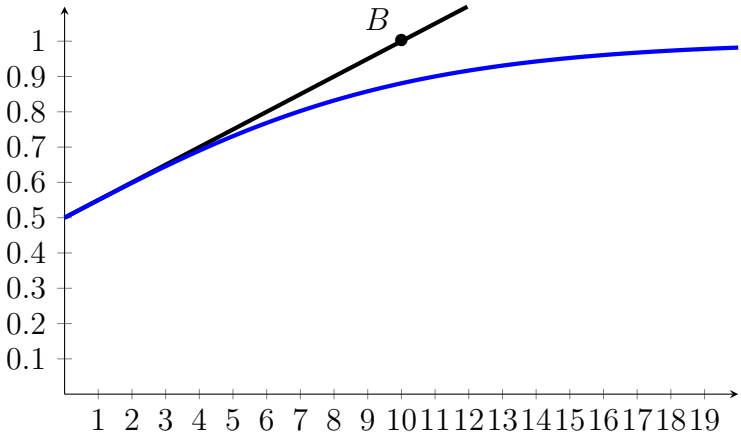
Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$p(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0; +\infty[$.

(b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

⚠ *Vous ne connaissez pas encore la limite. La question signifie : Lorsque x prend une valeur très très grande, de quelle valeur s'approche $f(x)$? Ne donnez pas de réponse justifiée : faites une conjecture, et expliquez pourquoi vous la pensez vraie.*

(c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

⛔ *Vous ne connaissez pas encore les intégrales (le symbole $\int$) ni les primitives. Ne faites que la question 4a.*

(a) Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}.$$

(b) En déduire une primitive de la fonction p sur $[0;+\infty[$.

(c) Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.