

L'objet de l'exercice est de tracer le tableau de variations de la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = e^x$, et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} \end{aligned}$$

2. Dresser le tableau de signes de f' , et en déduire les variations de f .

- L'exponentielle est strictement positive, donc $e^x > 0$.
- Un carré est toujours positif, donc $x^2 > 0$ (sauf pour $x = 0$, où $x^2 = 0$).
- La fonction g_1 est affine, croissante, et change de signe lorsque $x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g_1(x) = x - 1$	-	0	0	+
$g_2(x) = e^x$	+	+	+	+
$g_3(x) = x^2$	+	0	+	+
$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$	-	0	0	+
f	↘		↘ e ↗	

On a calculé l'image de 1 ainsi : $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$.

3. Quels sont les extremums locaux de f sur son domaine de définition ?

D'après le tableau de variations, l'unique minimum local de f est e , atteint pour $x = 1$.