

Exercice 1 (D'après l'exercice 2 du sujet du sujet 1 d'E3C 2 — Première générale — Spécialité mathématiques). *Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :*

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \text{ pour tout réel } x \in [2; 20].$$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.

$$\begin{aligned} R(7) &= (5 \times 7 - 30) e^{-0,25 \times 7} \\ &\approx 0,8689 \end{aligned}$$

Donc le résultat pour la vente de 7 centaines de litres de produit est 0,8689 dizaines de milliers d'euros environ, soit 8 689 euros environ.

2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).

$$\begin{aligned} R(4) &= (5 \times 4 - 30) e^{-0,25 \times 4} \\ &\approx -3,7 \end{aligned}$$

Donc $R(4) < 0$: le résultat pour la vente de 400 litres de produit est négatif.

3. Résoudre l'inéquation $R(x) > 0$, d'inconnue x . Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Remarquons qu'une exponentielle est toujours strictement positive, et que $x \mapsto 5x - 30$ est une fonction affine.

x	2	6	20
$5x - 30$	-	0	+
$e^{-0,25x}$	+		+
$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}$	-	0	+

Donc les solutions de $R(x) > 0$ sont $x \in]6; 20]$. En d'autres termes, le résultat sera positif à partir de 600 litres de produit fabriqués et vendus.

4. Calculer l'expression de la dérivée R' de la fonction R .

En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

On pose, pour tout $x \in [2; 20]$:

$$u(x) = 5x - 30 \text{ et } v(x) = e^{-0,25x}$$

Donc :

$$u'(x) = 5 \text{ et } v'(x) = -0,25e^{-0,25x}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} R'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 5e^{-0,25x} + (5x - 30) \times (-0,25)e^{-0,25x} \\ &= (5 + (5x - 30) \times (-0,25)) e^{-0,25x} \\ &= (5 - 1,25x + 7,5) e^{-0,25x} \\ &= (12,5 - 1,25x) e^{-0,25x} \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes de $R'(x)$, pour en déduire les variations de R .

x	2	10	20
$12,5 - 1,25x$	+	0	-
$e^{-0,25x}$	+		+
$R'(x) = (12,5 - 1,25x)e^{-0,25x}$	+	0	-
R			

Le résultat maximal est donc atteint pour la fabrication et la vente de 10 centaines de litres de produit, soit 1 000 litres.