6 Suites géométriques

Exercice 1 (Méthode 1). *Déterminer le premier terme et la raison des suites géométriques définies sur* $\mathbb{N}$ *par les expressions suivantes.*
Puisque l'on sait que ces suites sont géométriques (c'est donné dans l'énoncé), pas besoin de le prouver. Donc on sait que le terme général est $u_0 \times q^n$, et on met ces suites sous cette forme.

1. $u_n = -3e^{\frac{n}{2}} = -3e^{\frac{1}{2}\times n} = -3\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^n$. Donc le premier terme est $u_0 = -3e^{\frac{0}{2}} = -3 \times 1 = -3$, et la raison est $e^{\frac{1}{2}}$.
2. $$\begin{aligned} v_n &= 4e^{2n-1} \\ &= 4e^{2n} \times e^{-1} \\ &= 4 \times e^{-1} \times e^{2n} \\ &= 4 \times \frac{1}{e^1} \times \left(e^2\right)^n \\ &= \frac{4}{e}\left(e^2\right)^n \end{aligned}$$
   Donc le premier terme est $v_0 = 4e^{2\times 0-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$, et la raison est e^2.

Exercice 1 (Méthode 2). *Déterminer le premier terme et la raison des suites géométriques définies sur* $\mathbb{N}$ *par les expressions suivantes.*
Pour chaque suite, on calcule le nombre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si la suite est géométrique (ce qui est le cas ici), ce nombre est constant (il ne dépend plus de n) et est égal à la raison. C'est plus propre, mais demande un peu plus de calculs.

1.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{-3}e^{\frac{n+1}{2}}}{\cancel{-3}e^{\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{e^{\frac{n+1}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}} \\ &= e^{\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}} \\ &= e^{\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Donc la suite est géométrique, de premier terme $u_0 = -3e^{\frac{0}{2}} = -3 \times 1 = -3$ et de raison $e^{\frac{1}{2}}$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\cancel{4}e^{2(n+1)-1}}{\cancel{4}e^{2n-1}} \\ &= \frac{e^{2(n+1)-1}}{e^{2n-1}} \\ &= \frac{e^{2n+2-1}}{e^{2n-1}} \\ &= \frac{e^{2n+1}}{e^{2n-1}} \\ &= e^{(2n+1)-(2n-1)} \\ &= e^{\cancel{2n}+1-\cancel{2n}+1} \\ &= e^{2}\end{aligned}$$

Donc la suite est géométrique, de premier terme $v_0 = 4e^{2\times 0-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$, et la raison est e^2.