

Exercice 1 (D'après l'exercice 2 du sujet de baccalauréat S, Amérique du Sud, 8 novembre 2019). La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie. On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en $\mu\text{g/mL}$) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. (a) Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
- (b) Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
- (c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

A *Vous ne connaissez pas encore la limite. La question signifie : Lorsque t prend une valeur très très grande, de quelle valeur s'approche $f(t)$? Ne donnez pas de réponse justifiée : faites une conjecture, et expliquez pourquoi vous la pensez vraie.*

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

3. (a) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

(b) À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
 Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. (a) Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.

▲ *Vous ne connaissez pas encore le théorème permettant de démontrer rigoureusement votre réponse. Ne donnez pas de réponse justifiée : faites une conjecture, et expliquez pourquoi vous la pensez vraie.*

En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.

On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

(b) Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$ dans le sang.

5. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = -12(t + 4)e^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.

● *Vous ne connaissez pas l'intégrale (le symbole \int) ni les primitives. Ne faites pas cette question.*

(a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$ à l'unité près.

(b) En déduire une valeur approchée à $0,1$ près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$.