Tous les exercices (sauf le premier) sont ceux du chapitre 6 du manuel, à partir de la page 156.

Exercice 1 (Suite géométrique)**.** *Déterminer le premier terme et la raison des suites géométriques définies sur* $\mathbb{N}$ *par les expressions suivantes.*

1. $u_n = -3e^{\frac{n}{2}} = -3e^{\frac{1}{2}\times n} = -3\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^n$. Donc le premier terme est -3, et la raison est $e^{\frac{1}{2}}$.
2.

$$\begin{aligned} v_n &= 4e^{2n-1} \\ &= 4e^{2n} \times e^{-1} \\ &= 4 \times e^{-1} \times e^{2n} \\ &= 4 \times \frac{1}{e^1} \times \left(e^2\right)^n \\ &= \frac{4}{e}\left(e^2\right)^n \end{aligned}$$

Donc le premier terme est $\frac{4}{e}$, et la raison est e^2.

Exercice 93. 1. Il semble y avoir une unique solution $x = 12$.

2. (a) La courbe passe par $A(0;7)$, donc $f(0) = 7$.
   (b) Puisque $f(x) = (ax+b)\,e^{-0,2x}$, alors :

$$f(0) = (a\times 0 + b)\,e^{-0,2\times 0} = b$$

   (c) Nous avons montré que $f(0) = b$, et $f(0) = 7$. Donc $b = 7$, et :

$$f(x) = (ax+7)\,e^{-0,2x}$$

3. (a) Puisque la droite T passe par les points $A(0;7)$ et $B(2;14,2)$, alors son coefficient directeur est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{14{,}2-7}{2-0} = 3,6$.

   (b) La fonction f est le produit de deux fonctions définies par : $u(x) = ax + 7$ (de dérivée $u'(x) = a$), et $v(x) = e^{-0{,}2x}$ (de dérivée $v'(x) = -0,2e^{-0{,}2x}$). Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= a \times e^{-0{,}2x} + (ax+7) \times (-0,2)\, e^{-0{,}2x} \\ &= a \times e^{-0{,}2x} + (-0,2ax - 0,2 \times 7)\, e^{-0{,}2x} \\ &= (a - 0,2ax - 1,4)\, e^{-0{,}2x} \\ &= (-0,2ax + a - 1,4)\, e^{-0{,}2x} \end{aligned}$$

   (c) Nous avons montre, d'une part, que $f'(x) = (-0,2ax + a - 1,4)$ donc :

$$f'(0) = (-0,2a \times 0 + a - 1,4)\, e^{-0{,}2\times 0} \quad = a - 1,4$$

   D'autre part, la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0 est T, donc sa pente est égale à $f'(0)$. Donc $f'(0) = 3,6$. Donc $a - 1,4 = 3,6$, et $a = 5$, et :

$$f(x) = (5x+7)\, e^{-0{,}2x}$$

4. En reprenant l'expression de f' de la question 3b, en remplaçant a par 5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-0,2ax + a - 1,4)\, e^{-0{,}2x} \\ &= (-0,2 \times 5x + 5 - 1,4)\, e^{-0{,}2x} \\ &= (-x + 3,6)\, e^{-0{,}2x} \end{aligned}$$

5.

x	0		$3,6$		25
$-x + 3,6$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,2x}$		$+$		$+$	
$f'(x) = (-x+3,6)\, e^{-0,2x}$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

6. D'après le tableau de variations, le maximum de f est atteint pour $x = 3,6$, et est égal à :

$$\begin{aligned} f(3,6) &= (5 \times 3,6 + 7)\, e^{-0,2\times 3,6} \\ &= 25e^{-0,72} \\ &\approx 12,17 \end{aligned}$$

Exercice 99. 1. Le nombre q est une quantité de d'aliments fabriqués et vendus, donc q doit être positif : $q \geqslant 0$. De plus, dans l'expression de B, il y a une division par q, donc $q \neq 0$. Donc $\boxed{q > 0}$.

2. (a) Tout d'abord, la fonction B est la somme d'une constante 10, et d'une fraction $\frac{u(q)}{v(q)}$ (avec $u(q) = e^{0,2q+1}$ et $v(q) = q$, donc $u'(q) = 0,2e^{0,2q+1}$ et $v'(q) = 1$)). La dérivée

d'une constante est nulle, donc :

$$\begin{aligned}
B'(q) &= -\frac{u'(q)\times v(q) - u(q)\times v'(q)}{\left(v(q)\right)^2}\\
&= -\frac{0,2e^{0,2q+1}\times q - e^{0,2q+1}\times 1}{q^2}\\
&= -\frac{(0,2q-1)\,e^{0,2q+1}}{q^2}\\
&= \frac{(1-0,2q)\,e^{0,2q+1}}{q^2}
\end{aligned}$$

(b) Voir question suivante.

(c)

q	0		5		$+\infty$
$1-0,2q$		$+$	0	$-$	
$e^{0,2x+1}$		$+$		$+$	
q^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)=\frac{(1-0,2q)e^{0,2q+1}}{q^2}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

3. Le maximum de la fonction f est $f(5) = 10 - \frac{e^{0,2\times5+1}}{5} = 9,8$, atteint pour $q = 5$, donc le bénéfice maximal est 9,8 milliers d'euros, réalisé pour 5 tonnes d'aliments produits et vendus.

Exercice 101.

1.

$$A_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$
$$A_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

Or $e \approx 2,71828$, donc A_1 et A_2 ne sont pas de bonnes approximations.

2.

```
def A(n):
    return (1+1/n)**n

print(A(100))
print(A(10000))
print(A(1000000))
```

Le programme affiche :

```
2.7048138294215285
2.7181459268249255
2.7182804690957534
```

En ajoutant `from math import *` (pour charger le module mathématiques) et en remplaçant les dernières lignes `print(A(100))` par `print(A(100)-exp(1))`, nous obtenons la précision de chaque valeur approchée de e :

```
0.0134679990375166 1
0.000135901634119584
1.35936329170860 4e-06
```

Donc A_{100} est une approximation de e au dixième, A_{10000} est une approximation de e au millième, $A_{1000000}$ est une approximation de e au cent-millionième.

Exercice 104.

1. D'une part, $N(0) = N_0 \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = N_0$. D'autre part, $N'(t) = -\frac{N_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, donc :
$$\begin{aligned}\tau N'(t) + N(t) &= \tau \times \left(-\frac{N_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ &= -N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$
Donc les deux conditions sont vérifiées.
2. Nous avons montré que $N'(t) = -\frac{N_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Or N_0 est positif (c'est un nombre de noyaux), tout comme τ, et l'exponentielle est strictement positive, donc le nombre $N'(t) = -\frac{N_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ est négatif, et la fonction N est décroissante. Puisque N est un nombre de noyaux radioactifs qui se désintègrent (donc qui ne sont plus comptabilisés), il est normal que N diminue au cours du temps.

3. On cherche à résoudre $N(t) = \frac{N_0}{2}$.

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{N_0}{2} \\ N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) &= \frac{N_0}{2} \\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)} &= \frac{1}{2} \\ \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) &= 2 \end{aligned}$$

Or il est dit dans l'énoncé que l'unique solution de $e^x = 2$ est $x = \ln(2)$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{t}{\tau} &= \ln(2) \\ t &= \tau \ln(2) \end{aligned}$$

4. L'équation de la tangente à la courbe de N au point d'abscisse 0 est $y = N'(a)(t-a) + N(a)$, avec :

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ N(0) &= N_0 \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = N_0 \\ N'(0) &= -\frac{N_0}{\tau} \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = -\frac{N_0}{\tau} \end{aligned}$$

Donc l'équation de la tangente est :

$$y = -\frac{N_0}{\tau}(t-0) + N_0$$
$$y = -\frac{N_0}{\tau}t + N_0$$

Enfin, l'équation de l'axe des abscisses est $y = 0$, donc l'intersection de cet axe avec la tangente, dont nous venons de donner l'équation, a pour ordonnée $y = 0$, et son abscisse vérifie :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{N_0}{\tau}t + N_0 \\ \frac{N_0}{\tau}t &= N_0 \\ t &= N_0 \times \frac{\tau}{N_0} \\ t &= \tau \end{aligned}$$

La durée de vie moyenne de l'échantillon est donc τ.