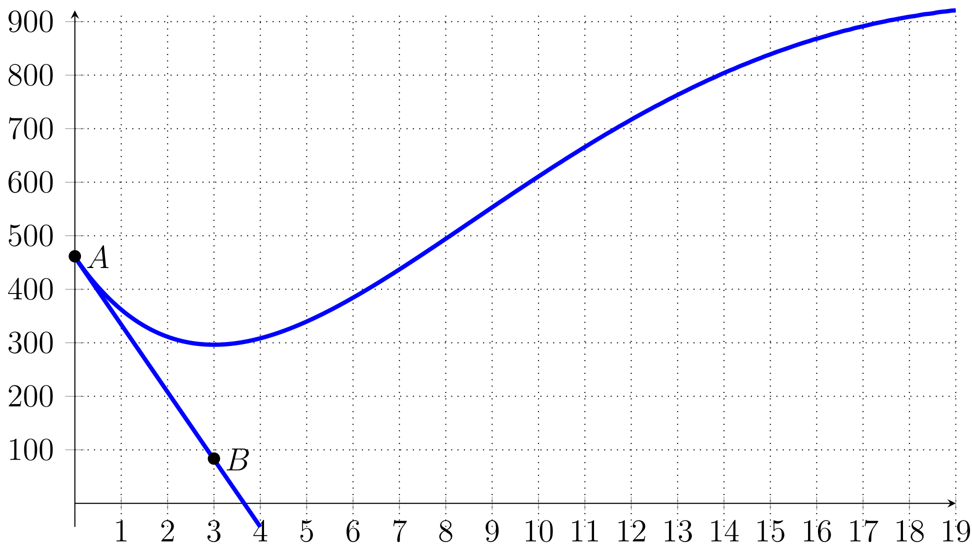
Exercice 1 (D'après l'exercice 4 du sujet de baccalauréat ES, Amérique du Sud, 13 novembre 2019)**.**

Partie A

La courbe ($\mathcal{C}$) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 19], représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. *Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.*

L'audience journalière décroit de 2000 à 2003, puis croît ensuite.

2. *Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.*

   Il y avait environ 800 milliers de téléspectateurs le 1er janvier 2014.

3. *La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A (0 ; 460) et B (3 ; 82), est la tangente à la courbe* $(\mathcal{C})$ *au point A.*

   Déterminer la valeur de $f'(0)$ *où* f' *désigne la fonction dérivée de la fonction* f *représentée par* $(\mathcal{C})$ *?*

   Le nombre dérivé de f en 0, $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Cette tangente est (AB), de coefficient directeur $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{82-460}{3-0} = -126$. Donc $\boxed{f'(0) = -126}$.

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f *définie sur l'intervalle [0 ; 29] par :*

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)e^{-0,1x}$$

où x *représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple* $x = 19$ *pour l'année 2019).*

1. *Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.*

   Ce nombre est $f(14) = (20 \times 14^2 - 80 \times 14 + 460)\, e^{-0,1 \times 14} \approx 804$ milliers.

2. *On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0 ; 29].*
   (a) *Démontrer que f' est définie par :*

$$f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}.$$

La fonction f est le produit des deux fonctions définies par $u(x) = 20x^2 - 80x + 460$ (de dérivée $u'(x) = 20 \times 2x - 80 = 40x - 80$), et $v(x) = e^{-0,1x}$ (de dérivée $v'(x) = -0,1e^{-0,1x}$). Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (40x - 80) \times e^{-0,1x} + (20x^2 - 80x + 460) \times (-0,1)e^{-0,1x} \\ &= (40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46)e^{-0,1x} \\ &= (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x} \end{aligned}$$

   (b) *On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.*
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	***Résultat :***
Solve$(-2\mathrm{x}^2 + 48\mathrm{x} - 126 = 0)$	*3 et 21*

Retrouver ce résultat par le calcul.

Méthode 1. La fonction $-2x^2+48x-126$ est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 48^2 - 4 \times (-2) \times (-126) = 1296$. Il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-48-\sqrt{1296}}{2\times(-2)} = 21$ et $x_2 = \frac{-48+\sqrt{1296}}{2\times(-2)} = 3$.

Méthode 2. La fonction $-2x^2 + 48x - 126$ est un trinôme du second degré, donc elle a au maximum deux racines. On remarque que $-2 \times 3^2 + 48 \times 3 - 126 = 0$ et $-2 \times 21^2 + 28 \times 21 - 126 = 0$, donc 3 et 21 sont bien les racines du trinôme.

(c) *En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 29] et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle [0 ; 29]. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.*

x	0		3		21		29
$-2x^2+48x-126$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$e^{-0,1x}$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	460	$\searrow$	296	$\nearrow$	931	$\searrow$	823

Pour les extremums, on a calculé : $f(0) = 460$; $f(3) \approx 296$; $f(21) \approx 931$; $f(29) \approx 823$.

(d) *Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.*

D'après le tableau de variations, le maximum de f sur $[0; 29]$ est 931, soit 931 000 téléspectateurs, donc le nombre de téléspectateurs ne dépassera jamais le million avant 2029.

3. Vous ne connaissez pas le théorème nécessaire pour répondre rigoureusement à cette question. Vous pouvez donc répondre sans justifier, ou par lecture graphique. *Montrer que l'équation* $f(x) = 800$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle [3 ; 21]. Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de* α.

   Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000 ?

   Puisque la fonction est strictement croissante sur $[3; 21]$, que $f(3) < 800$ et $f(21) > 800$, alors forcément [1], l'équation $f(3) = 800$ a une unique solution sur cet intervalle.

   À la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant (les valeurs sont arrondies à l'unité).

x	$f(x)$
13	763
14	804

   Donc le nombre α, solution de $f(x) = 800$, est compris entre 13 et 14.

   Donc le nombre de téléspectateurs dépassera 800 000 au cours de l'année 2013.

4. *Vous verrez l'an prochain...*

1. Vous verrez l'an prochain le théorème à appliquer ici à la place de ce « forcément » qui n'a pas la place dans une démonstration mathématique.