

Exercice 1 (Inéquation). *On souhaite résoudre l'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$.*

1. (a) *Dresser le tableau de signes du polynôme $X^2 + X - 2$.*

Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$, soit strictement positif. Il y a donc deux solutions : $X_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 1} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$.
Le tableau de signes est donc :

X	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$X^2 + X - 2$	+	0	-	0	+

- (b) *En déduire que $X^2 + X - 2 \leq 0$ pour $-2 \leq X \leq 1$.*

En lisant le tableau de signes de la question précédent, on observe que $X^2 + X - 2 \leq 0$ pour $-2 \leq X \leq 1$.

2. *Déduire de la question précédente que $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$ si et seulement si $-2 \leq e^x \leq 1$.*

On pose $X = e^x$. On observe que $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$. L'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$ est alors équivalente à $X^2 + X - 2 \leq 0$, dont les solutions sont $-2 \leq X \leq 1$. Donc, puisque $X = e^x$, alors l'inéquation est équivalente à :

$$-2 \leq e^x \leq 1$$

3. Résoudre $-2 \leq e^x$ et $e^x \leq 1$, et en déduire les solutions de l'inéquation de départ.

D'une part, $-2 \leq e^x$ est toujours vraie, car $e^x > 0$.

D'autre part :

$$e^x \leq 1$$

$$e^x \leq e^0$$

$$x \leq 0$$

Donc $-2 \leq e^x \leq 1$ est équivalent à $\boxed{x \leq 0}$.

Exercice 2 (Étude de fonction). *L'objet de l'exercice est de tracer le tableau de variations de la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = e^x$, et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc :


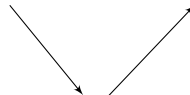
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} \end{aligned}$$

2. Dans un même tableau, donner le tableau de signes des trois fonctions définies par $g_1(x) = x - 1$, $g_2(x) = e^x$, $g_3(x) = x^2$, et en déduire que le signe de la dérivée f' est : ...

- L'exponentielle est strictement positive, donc $e^x > 0$.
- Un carré est toujours positif, donc $x^2 > 0$ (sauf pour $x = 0$, où $x^2 = 0$).
- La fonction g_1 est affine, croissante, et change de signe lorsque $x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$.

Voir le tableau à la question suivante.

3. En déduire les variations de la fonction f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g_1(x) = x - 1$	-	-	0	+
$g_2(x) = e^x$	+	+	+	+
$g_3(x) = x^2$	+	0	+	+
$f'(x) = \frac{(x-1)x^x}{x^2}$	-	-	0	+
f				

4. *Quel est le minimum de f sur \mathbb{R}^{+*} ?*

D'après le tableau de variations, le minimum de f sur \mathbb{R}^{+*} est égal à $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$, atteint pour $x = 1$.