Chapitre 6

Suites numériques

1 Premières définitions

Définition 1. Une *suite* est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) qui à tout entier n (appelé *rang*) de son domaine de définition associe le réel u_n, appelé *terme de la suite*.

Remarque 2. Une définition non formelle est : une suite est une liste infinie de nombres réels, numérotés.

Remarque 3. Une suite peut être définie (entre autres) :

— par récurrence en donnant le(s) premier(s) terme(s) et une formule permettant de calculer les suivants ;

— avec une formule explicite, donnant directement le terme de rang n.

Exemple 4.

— Soit la suite u définie par : $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Ses premiers termes sont $2, 5, 11, 23 \ldots$.

— Soit la suite v de premier terme 1, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$. Ses premiers termes sont : $1, 3, 7, 15 \ldots$.

— Soit la suite w définie par : w_n est le temps d'ensoleillement, en minutes, au portail du lycée, au n^{e} jour après le premier janvier 2014.

Remarque 5. Soient une suite u.

— u et (u_n), $(u(n))$ désignent la suite ;

— $u(n)$ et u_n sont des réels : ce sont tous les deux le terme de la suite de rang n.

En prenant une fonction f pour analogie, on peut comparer u et (u_n) à f, et u_n à $f(x)$ (pour un certain x).

Définition 6. Une suite est u est dite :

— *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;

— *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;

— *constante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

Exemple 7. TODO Suite croissante, décroissante, croissante à partir d'un certain rang, ni croissante ni décroissante.

2 Suites arithmétiques

Définition 8. Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$.
Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme et sa raison.

Exemple 9.

— La suite $0, 1, 2, 3$ est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.

— La suite $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ est une suite arithmétique de premier terme $-\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{4}$.

— La suite $97,1; 96,2; 95,3$ est une suite arithmétique de premier terme $97,1$ et de raison $-0,9$.

— La suite $1, 1, 1, 1$ est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 0.

Remarque 10. Dans toute la suite, on considère la suite u arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Méthode 11. TODO Prouver qu'une suite est arithmétique.

Propriété 12.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

— En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 13. La suite u est :

— (strictement) croissante si et seulement si sa raison est (strictement) positive ;

— (strictement) décroissante si et seulement si sa raison est (strictement) négative ;
— constante si sa raison est nulle.

Démonstration. Soit u une suite arithmétique.
TODO Revoir : cette propriété n'a pas encore été vue.
Alors u est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Or, puisque u est arithmétique, $u_{n+1} - u_n$ est égale à sa raison, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ si et seulement si sa raison est positive.
Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Propriété 14. TODO Limite ? Dans le chapitre suivant ?

Propriété 15. La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. On ne démontre que le cas particulier ; le cas général est admis.
On appelle $S = \sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$. En écrivant la même somme, mais en partant du plus grand terme, on a : $S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$.
On ajoute membre à membre ces deux expressions de S :

$$2S = ((1+n) + (2+n-1) + \ldots + ((n-1)+2) + (n+1)$$

On remarque alors que chacun de ces termes est égal à $n+1$, et qu'ils sont au nombre de n. Ainsi, $2S = n(n+1)$, ou encore :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

3 Suites géométriques

Définition 16. Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel q non nul, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $v_{n+1} = qv_n$.
Habituellement, une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple 17.

— La suite $2, 4, 8, 16, \ldots$ est géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

— On place 100 € sur un compte en banque, rapportant 3 % d'intérêts par ans. Si on ne place ni ne retire d'argent sur le compte, la suite constituée des sommes présentes sur le compte, en euros, à la fin de chaque année est géométrique de premier terme 100 et de raison $1,03$.

— La suite $256, -128, 64, -32 \ldots$ est géométrique de premier terme 256 et de raison $-\frac{1}{2}$.

— La suite $3, 3, 3, 3 \ldots$ est géométrique de premier terme 3 et de raison 1.

Remarque 18. Dans toute la suite, v est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.

Propriété 19.

— Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_p q^{n-p}$.

— En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 q^n$.

Propriété 20. TODO Simplifier ?

1. Soit w la suite définie par $w_n = q^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite w est :
   — croissante si $q \geqslant 1$;
   — décroissante si $0 < q \leqslant 1$;
   — constante si $q = 1$;
   — ni croissante ni décroissante si $q < 0$.

   De plus, elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$).
2. La suite v :
   — a les mêmes variations que w si $v_0 > 0$;
   — a des variations opposées si $v_0 < 0$;
   — est constante si $v_0 = 0$.

Démonstration. Soit w la suite géométrique définie dans la propriété, avec q supérieur à 1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = q w_n$ par définition de w. Or quel que soit n, w_n est un produit de termes strictement positifs, donc w_n est lui-même un nombre strictement positif. Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant q$, et la suite est croissante.
Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Remarque 21. On dit qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ croît de manière *exponentielle*. TODO développer.

Propriété 22. Soit un nombre réel q différent de 0 et 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration. *On suppose d'abord que le premier terme de la suite est 1.*
Soit v une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$). Soit n un entier naturel. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n} v_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

On a alors $qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} = S + q^{n+1} - 1$, et donc $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Cas général : le premier terme de la suite n'est pas nécessairement 1.
Soit w la suite définie par $w_n = q^n$. On remarque que pour tout n, $v_n = v_0 q^n = v_0 w_n$. Donc la somme des termes de 0 à n de v vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_0 w_k = v_0 \sum_{k=0}^{n} w_k = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

4 Variations d'une suite

Propriété 23. Soit u une suite, telle que tous ses termes sont strictement positifs.

- u est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- u est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Propriété 24. Soient u une suite, et f une fonction telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors u est croissante sur $\mathbb{N}$.
- Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors u est décroissante sur $\mathbb{N}$.
- La réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 25. TODO Exemple de réciproque vraie et fausse.

Définition 26 (Notion de limite)**.** *Ces définitions ne sont pas formelles.*

- On dit qu'une suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut (en prenant n suffisament grand). On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).
- On dit qu'une suite u tend vers un réel l lorsqu'elle peut prendre des valeurs v_n aussi proches de l que l'on veut (en prenant n suffisament grand). On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

5 Algorithmes

TODO
Valeur du terme de rang n (terme et somme)
Dépassement de seuil (terme et somme)