

Exercice (Défi — Optionnel).

1. Déterminer une fonction définie sur \mathbb{R} qui soit à la fois paire et impaire.
2. Montrer que cette fonction est l'unique fonction à la fois paire et impaire.

Répondons aux deux questions en même temps.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} qui soit à la fois paire et impaire (en supposant qu'elle existe), et soit x un réel quelconque. Alors :

- puisque f est paire, alors $f(x) = f(-x)$;
- puisque f est impaire, alors $-f(x) = f(-x)$.

Donc $f(-x)$ est à la fois égal à $f(x)$ et $-f(x)$, donc :

$$\begin{aligned}f(x) &= -f(x) \\2f(x) &= 0 \\f(x) &= \frac{0}{2} \\f(x) &= 0\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que *si* une telle fonction existe, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f est la fonction constante égale à 0. Réciproquement, nous pouvons vérifier que la fonction constante égale à 0 est à la fois paire et impaire.

La seule fonction à la fois paire et impaire est donc la fonction constante nulle.