Correction de l'exercice 78 p. 67

1.

(a) On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

(b) Puisque M est sur la droite d'équation $y = x - 4$, on peut remplacer y par $x - 4$, donc :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{x^2 + (x-4-1)^2} \\ AM &= \sqrt{x^2 + (x-5)^2} \\ AM &= \sqrt{x^2 + x^2 - 10x + 25} \\ AM &= \sqrt{2x^2 - 10x + 25} \end{aligned}$$

2.

(a) Pour que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$ soit définie pour toute valeur de x, il faut que le trinôme $2x^2 - 10x + 25$ soit positif pour toute valeur de x (sans quoi on calculera la racine carrée d'un nombre négatif, ce qui est impossible). Étudions le signe de $2x^2 - 10x + 25$.
C'est un trinôme de discriminant $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 25 = -300$, qui est négatif, donc il n'a pas de racine. Le facteur devant le x^2 est positif, donc le trinôme est strictement positif pour toute valeur de x.
Donc la fonction f est correctement définie.

(b) et (c) On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	$2,5$	$+\infty$
$2x^2 - 10x + 25$	↘	12,5	↗
$\sqrt{2x^2 - 10x + 25}$	↘	$\sqrt{12,5}$	↗

(b) Le minimum de la fonction f est donc $\sqrt{12,5}$, donc la plus petite valeur de la distance AM est $\sqrt{12,5}$: la distance du point A à la droite est $\sqrt{12,5}$.