Correction de l'exercice 95 p. 48

On donne le trinôme $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.
Notons d'abord que puisque f est un trinôme, alors $m \neq 0$ (donc 0 est une valeur interdite pour m).

1. L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution si et seulement si son discriminant est nul, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ 4^2 - 4 \times m \times 2\,(m-1) &= 0 \\ 16 - 8m(m-1) &= 0 \\ 16 - 8m^2 + 8m &= 0 \\ -8m^2 + 8m + 16 &= 0 \end{aligned}$$

   Cette expression est elle-même un trinôme, de discriminant $\Delta' = 8^2 - 4 \times (-8) \times 16 = 576$. Puisque Δ' est strictement positif, il y a deux solutions : $m_1 = \frac{-8-\sqrt{576}}{2\times(-8)} = 2$ et $m_2 = \frac{-8+\sqrt{576}}{2\times(-8)} = -1$.
   Donc le trinôme a une unique racine pour $m = 2$ ou $m = -1$.

   Premier cas : $m = -1$. Alors $f(x) = -x^2+4x-4$, le discriminant est nul (d'après la question précédente), et l'unique racine est $x = -\frac{4}{2\times -1} = 2$.

   Second cas : $m = 2$. Alors $f(x) = 2x^2+4x+2$, le discriminant est nul (d'après la question précédente), et l'unique racine est $x = -\frac{4}{2\times 2} = -1$.

   Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution pour $m = -1$ (la solution est alors $x = 2$) et pour $m = 2$ (la solution est alors $x = -1$).

2. (a) L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire (en utilisation le développement de la question précédent) :

$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ -8m^2 + 8m + 16 &> 0 \end{aligned}$$

   D'après la question précédente, les racines de ce nouveau trinôme en m sont -1 et 2, donc le tableau de signes de ce trinôme en m est :

m	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$-8m^2+8m+16$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

Donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $m \in \,]-1;0[\,\cup\,]0;2[$ (ce que l'on peut aussi formuler : « m est compris strictement entre -1 et 2, en excluant 0 »).

(b) $f(x) < 0$ pour tout nombre x si et seulement si $\Delta < 0$ (le trinôme n'a aucune racine), et le facteur devant x^2 est négatif (donc $m < 0$). D'après le tableau de signes de la question précédente, $\Delta < 0$ pour $m \in \,]-\infty;-1[\,\cup\,]2;\infty[$. Or seules les solutions négatives nous intéressent, donc $\boxed{m \in \,]-\infty;-1[}$.