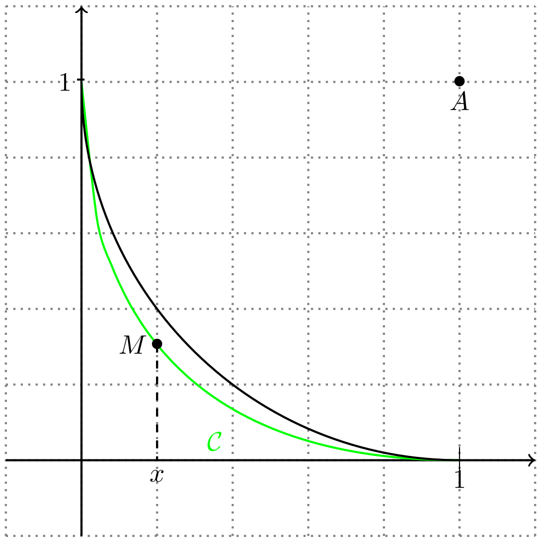
Correction de l'exercice 95 p. 91



3. Soit A le point de coordonnées $(1;1)$ et M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x. On considère la fonction g qui a x associe le réel AM^2.

   a. La courbe $\mathcal{C}$ est définie pour x dans $[0;1]$, donc le point M également, et g également.

   b. L'expression générale de la longueur AM est $\sqrt{\left(x_M - x_A\right)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2}$. Donc $g(x) = AM^2 = \left(x-1\right)^2 + \left(f(x)-1\right)^2$. En développant, nous obtenons $g(x) = 2x^2 + 2x - 4x\sqrt{x} + 1$.

   c. D'une part, d'après la question précédente, $g(x) - 1 = 2x^2 + 2x - 4x\sqrt{x}$. D'autre part, $2x\left(1-\sqrt{x}\right)^2 = 2x\left(1 - 2\sqrt{x} + x\right) = 2x - 4x\sqrt{x} + 2x^2$. Donc $g(x) - 1 = 2x\left(1-\sqrt{x}\right)$.

   d. Pour $x \in [0;1]$, $x \leqslant 1$, donc $\sqrt{x} \leqslant 1$ (car la fonction racine est croissante). Donc $1 - \sqrt{x} \geqslant 0$, et $\left(1-\sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$ (car la fonction carrée est croissante pour les réels positifs. D'autre part, x étant positif, $2x \geqslant 0$. Donc $2x\left(1-\sqrt{x}\right)^2$ est le produit de deux quantités positive : c'est un nombre positif.

      Nous avons montré que $g(x) - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $g(x) \geqslant 1$. Donc $AM^2 \geqslant 1$, et, puisque la fonction racine carrée est croissante, $AM \geqslant 1$.

   e. Puisque $AM \geqslant 1$, le point M est à l'extérieur du cercle de centre A et de rayon 1. Donc la courbe $\mathcal{C}$ est à l'extérieur de ce cercle.