Correction de l'exercice 44 p. 49

a. $2(\cos x)^2 - 7\cos x + 3 = 0$: On pose $X = \cos x$. Alors l'équation devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$. Il est positif donc il y a deux solutions $X_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7+5}{4} = 3$.
Donc soit $X = \frac{1}{2}$, soit $X = 3$.
Si $X = \frac{1}{2}$, alors $\cos x = \frac{1}{2}$, et $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$, mais aussi bien d'autres : la suite au chapitre trigonométrie...
Si $X = 3$, alors $\cos x = 3$, ce qui n'est pas possible car un cosinus est compris entre -1 et 1.

b. $\frac{6}{(x-2)^2} - \frac{11}{x-2} - 7 = 0$: On pose $X = \frac{1}{x-2}$, et l'équation devient $6X^2 - 11X - 7 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 6 \times (-7) = 121 + 168 = 289 = 17^2$. Donc $X_1 = \frac{-(-11)-\sqrt{289}}{2\times 6} = \frac{11-17}{12} = -\frac{1}{2}$ ou $X_2 = \frac{-(-11)+\sqrt{289}}{2\times 6} = \frac{11+17}{12} = \frac{7}{3}$.
Si $X = -\frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$, et $-2 = x - 2$, et $x = 0$.
Si $X = \frac{7}{3}$, alors $\frac{1}{x-2} = \frac{7}{3}$, et $3 = 7(x-2)$, et $x = \frac{17}{7}$.
Les solutions sont donc $x \in \left\{0; \frac{17}{7}\right\}$.

c. $5x + 7\sqrt{x} - 6 = 0$: On pose $X = \sqrt{x}$, donc $X^2 = \sqrt{x}^2 = x$, et l'équation devient $5X^2 + 7X - 6 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 7^2 - 4 \times 5 \times (-6) = 49 + 120 = 169 = 13^2$. Il est positif, donc il y a deux solutions $X_1 = \frac{-7-\sqrt{169}}{2\times 5} = \frac{-7-13}{10} = -2$ et $X_2 = \frac{-7+\sqrt{169}}{2\times 5} = \frac{6}{10} = 0,6$.
Si $X = -2$, alors $\sqrt{x} = -2$, ce qui n'est pas possible car une racine carrée est toujours positive.
Si $X = -2$, alors $\sqrt{x} = 0,6$, et $x = (0,6)^2 = 0,36$.
Il n'y a donc qu'une seule solution $x = 0,36$.