29/05/2019
DS n° 9 — A

Trigonométrie
Suites

1^e S

Exercice 1 (6 points)**.** *Les trois questions sont indépendantes.*

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$.
2. Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x)$$

3. (a) En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, montrer que :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

   (b) En justifiant pourquoi $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.

Exercice 2 (7 points)**.** On définit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 (arrondir les résultats au centième).
2. Conjecturer les variations de la suite.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$\mathtt{u_{n+1} - u_n =}$
$\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$

3. Dresser le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 2x + 1$.
4. *Sans nouveau calcul,* en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis les variations de la suite u.

Exercice 3 (7 points). *Les deux questions sont indépendantes.*
On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0,1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 4$.

1. L'objet cette question est de déterminer une formule explicite pour u.

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + 80$.

   (a) Montrer que v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 80,1$ et de raison $1,05$.

   (b) En déduire le terme général de v, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 80,1 \times 1,05^n - 80$.

   (c) Combien vaut u_{100} (arrondir à l'unité) ?

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En utilisant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ou la différence $u_{n+1} - u_n$, ou toute autre méthode de votre choix, déterminer les variations de la suite u.

Propriété. Pour tous réels a et b, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\
\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
\cos 2a &= 1 - 2\sin^2 a \\
\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\
\cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\
\sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}
\end{aligned}$$