Exercice 1 (6 points)**.**

1. *En remarquant que* $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$*, déterminer la valeur exacte de* $\cos\frac{5\pi}{12}$*.*

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\end{aligned}$$

2. *Simplifier au maximum l'expression suivante :*

$$\sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x)$$

$$\begin{aligned}\sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x) &= \sin\left(3x-2x\right)\\ &= \sin x\end{aligned}$$

3. (a) *En remarquant que* $2\times\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$*, montrer que :*

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1+\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)}{2}\\ &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(b) *En justifiant pourquoi* $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, *en déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{8}$. Puisque $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, alors $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

Mais $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, et donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}$.

Exercice 2 (7 points)**.** *On définit la suite u définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. *Calculer* u_0, u_1, u_2, u_3 *(arrondir les résultats au centième).*

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{0^2}{2^0} = 0 \\
u_1 &= \frac{1^2}{2^1} = 0,5 \\
u_2 &= \frac{2^2}{2^2} = 1 \\
u_3 &= \frac{3^2}{2^3} \approx 1,125
\end{aligned}
$$

2. *Conjecturer les variations de la suite.* Sur les quatre premières valeurs, la suite est croissante. On conjecture que la suite est croissante sur $\mathbb{N}$.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$\mathtt{u_{n+1} - u_n =}$
$\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$

3. *Dresser le tableau de signes du trinôme* $-x^2 + 2x + 1$.

   Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$. Puisqu'il est positif, il y a deux racines :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{-2-\sqrt{8}}{-2} = 1+\sqrt{2} \approx 2,41 \\
x_2 &= \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{-2+\sqrt{8}}{-2} = 1-\sqrt{2} \approx -1,41
\end{aligned}
$$

   Le tableau de signes est donc le suivant.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Sans nouveau calcul, *en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis les variations de la suite u.* Puisque le trinôme $-x^2+2x+1$ est négatif à partir de $x \geqslant 1+\sqrt{2}$, alors le nombre $-n^2+2n+1$ est négatif à partir de $n \geqslant 3$.
   D'autre part, 2^{n+1} est toujours positif, donc le rapport $\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$ est négatif à partir de $n = 3$.
   Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$ est négatif à partir de $n = 3$, donc la suite u est décroissante à partir de $n = 3$.

Exercice 3 (7 points)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*
On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0,1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 4$.

1. *L'objet cette question est de déterminer une formule explicite pour u.*
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + 80$.
   (a) *Montrer que v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 80,1$ et de raison $1,05$.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 80 \\ &= 1,05 \times u_n + 4 + 80 \\ &= 1,05 \times u_n + 84 \\ &= 1,05 \times \left(u_n + \frac{84}{1,05}\right) \\ &= 1,05 \times (u_n + 80) \\ &= 1,05 \times v_n \end{aligned}$$

   Donc la suite v est géométrique, de raison $1,05$. Son premier terme est $v_0 = u_0 + 80 = 0,1 + 80 = 80,1$.
   (b) *En déduire le terme général de v, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 80,1 \times 1,05^n - 80$.*
   Puisque v est une suite géométrique, sont terme général est $v_n = 80,1 \times 1,05^n$.
   D'autre part, puisque $v_n = u_n + 80$, alors $u_n = v_n - 80 = 80,1 \times 1,05^n - 80$.

(c) *Combien vaut u_{100} (arrondir à l'unité) ?*

En utilisant le terme général calculé précédemment, on obtient :

$$u_{100} = 80,1 \times 1,05^{100} - 80 \approx 10453$$

2. *On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En utilisant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ou la différence $u_{n+1} - u_n$, ou toute autre méthode de votre choix, déterminer les variations de la suite u.*

Méthode 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1,05 \times u_n + 4}{u_n} \\ &= \frac{1,05 \times u_n}{u_n} + \frac{4}{u_n} \\ &= 1,05 + \frac{4}{u_n}\end{aligned}$$

Or, puisque $u_n > 0$, alors $\frac{4}{u_n} > 0$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,05 + \frac{4}{u_n} > 1$. Donc la suite est strictement croissante.

Méthode 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 1,05 \times u_n + 4 - u_n \\ &= 0,05 \times u_n + 4\end{aligned}$$

Or puisque $u_n > 0$, alors $0,05 \times u_n > 0$, et $u_{n+1} - u_n = 0,05 \times u_n + 1 > 0$. Donc la suite est strictement croissante.

Méthode 3. *Cette méthode utilise la réponse à la question 1a.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque v est une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison strictement plus grande que 1, elle est strictement crossante, donc :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &> v_n \\ u_{n+1} + 80 &> u_n + 80 \\ u_{n+1} &> u_n\end{aligned}$$

Donc la suite u est strictement croissante.