

Exercice 1 (5 points). On considère la fonction f définie sur $[-10; -2[\cup] - 2; 10]$ par : $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [-10; -2[\cup] - 2; 10]$, on a : $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$. La fonction est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x - 1$ (et $u'(x) = 2$), et $v(x) = x + 2$ (donc $v'(x) = 1$). La dérivée est donc $\frac{u'v - v'u}{v^2}$, soit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+2) - 1(2x-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{5}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-10; -2[\cup] - 2; 10]$.
Le nombre 5 est strictement positif, tout comme $(x+2)^2$ (car c'est un carré, et $x \neq -2$), donc le rapport des deux est strictement positif : $f'(x) > 0$.
3. En déduire les variations de f sur cet intervalle (arrondir les valeurs des extrémums au dixième).

x	-10	-2	10
$f'(x)$	+		+
f	$\frac{21}{8}$	\nearrow	$\frac{19}{12}$

Exercice 2 (7 points). On considère la fonction définie sur $[-5; 5]$ définie par $f : x \mapsto x^3 + 1,5x^2 - 18x - 2$.

1. Dériver f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times x^2 + 1,5 \times 2x - 18 \\ &= 3x^2 + 3x - 18 \end{aligned}$$

2. Montrer que le signe de f' est :

x	-5	-3	2	5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

La dérivée f' est un trinôme du second degré. Nous calculons ses racines (discriminant positif, etc.), et nous trouvons -3 et 2 , ce qui donne le signe demandé.

3. En déduire les variations de f .

x	-5	-3	2	5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	0,5	38,5	-24	70,5	

4. Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[-5; 5]$?

Le minimum de f est -24 , atteint en $x = 2$; le maximum est $70,5$, atteint en $x = 5$.

Exercice 3 (2 points). Déterminer les coordonnées du centre, et le rayon du cercle défini par l'équation :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0$$

Pour tout couple x, y de nombres réels, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 &= 0 \\ x^2 + 4x + 4 + x^2 - 6y + 9 - 36 - 9 - 4 &= 0 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 49 &= 0 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 49 \\ (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 &= 7^2 \end{aligned}$$

Donc l'équation définit un cercle de centre de coordonnées $(-2; 3)$ et de rayon 7.

Exercice 4 (8 points). Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1, 2; -3, 6)$, $B(10; 14)$, $C(-4; 12)$.

L'objet de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} , circonscrit au triangle ABC (c'est-à-dire au cercle qui passe par les trois points A, B, C).

1. Rappel : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment en son milieu.

(a) Déterminer une équation cartésienne de la droite M_1 passant par $I(5, 6; 5, 2)$ (milieu de $[AB]$) et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(8, 8; 17, 6)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan. Ce point M est sur la droite M_1 si et seulement si $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire (avec $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x-5, 6 \\ y-5, 2 \end{pmatrix}$) si :

$$\begin{aligned} (x - 5, 6) \times 8, 8 + (y - 5, 2) \times 17, 6 &= 0 \\ 8, 8x - 49, 28 + 17, 6y - 91, 52 &= 0 \\ 8, 8x + 17, 6y - 140, 8 &= 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne est donc

$$8,8x + 17,6y - 140,8 = 0$$

- (b) *Sans nouveau calcul, justifier que cette droite M_1 est la médiatrice du segment $[AB]$.*

La droite M_1 passe par I milieu de $[AB]$, et elle a pour vecteur normal \overrightarrow{AB} , donc elle est perpendiculaire à $[AB]$: c'est la médiatrice de $[AB]$.

On admet que la droite M_2 , d'équation cartésienne $7x + y - 34 = 0$, est la médiatrice du segment $[BC]$.

2. (a) *Montrer que $K(4;6)$ est le point d'intersection des droites M_1 et M_2 .*

Vérifions que les coordonnées de K vérifient les deux équations des droites.

$$M_1 : 8,8 \times 4 + 17,6 \times 6 - 140,8 = 0 \text{ donc } K \in M_1.$$

$$M_2 : 7 \times 4 + 6 - 34 = 0 \text{ donc } K \in M_2.$$

Donc le point K est sur les deux droites.

On admet que K est le centre du cercle \mathcal{C} , circonscrit à ABC .

- (b) *Montrer que le rayon de \mathcal{C} est 10.*

Le rayon du cercle \mathcal{C} , de centre K et passant par B (puisque'il est circonscrit à ABC) est :

$$\begin{aligned} BK &= \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 10)^2 + (6 - 14)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= 10 \end{aligned}$$

3. *Sans justifier, en déduire une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} , circonscrit à ABC , de centre $K(4;6)$ et de rayon 10. Une équation cartésienne du cercle est :*

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$$